Un approccio vettoriale alla Geometria Analitica nello Spazio

Simone Zuccher

20 maggio 2017

Indice

1 Geometria analitica nel piano

Con riferimento alla figura 1, dati due punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ nel piano, il loro punto medio M ha coordinate

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right),$$

mentre la loro distanza è (teorema di Pitagora)

$$d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

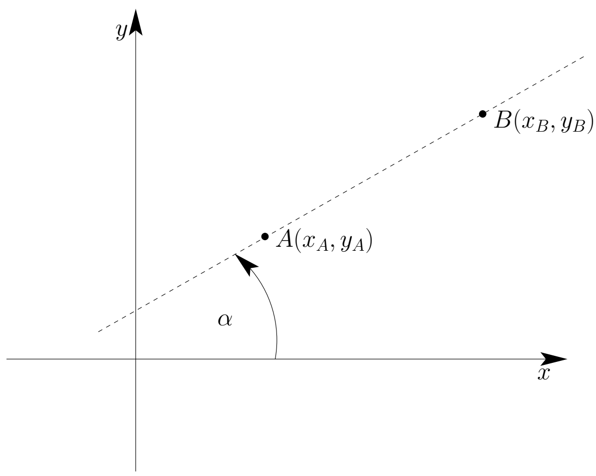

Figura 1: Punti A e B nel piano, retta passante per essi

1.1 Ripasso sulla retta

Per quanto riguarda la retta passante per due punti (che è unica), si hanno 3 casi:
(a) se i punti sono allineati orizzontalmente, ossia se $y_A = y_B = y_0$, allora l'equazione della retta è

$$y = y_0,$$

(b) se i punti sono allineati verticalmente, ossia se $x_A = x_B = x_0$, allora l'equazione della retta è

$$x = x_0,$$

(c) se la retta è obliqua, ossia se $x_A \neq x_B \wedge y_A \neq y_B$, allora può essere scritta nella forma

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}.$$

Sviluppando i conti si ottiene

$$(y_B - y_A)x - (x_B - x_A)y - x_A(y_B - y_A) + y_A(x_B - x_A) = 0,$$

equivalente a

$$(y_B - y_A)x + (x_A - x_B)y - x_Ay_B + y_Ax_B = 0.$$

Introducendo le costanti

$$a = y_B - y_A, \quad b = x_A - x_B, \quad c = y_Ax_B - x_Ay_B,$$

l'equazione di una retta passante per due punti può essere riscritta nella forma generica, detta *implicita*

$$ax + by + c = 0.$$

Si osservi che essa include i casi particolari visti in precedenza in quanto se $x_A = x_B$ allora $b = 0$ e la retta è verticale, mentre se $y_A = y_B$ allora $a = 0$ e la retta è orizzontale.

Se la retta non è verticale, ossia se $b \neq 0$, allora si può scrivere la sua equazione nella forma *esplicita*, isolando y

$$y = mx + q, \quad \text{con} \quad m = -\frac{a}{b} \quad \text{e} \quad q = -\frac{c}{b}.$$

La costante m è detta *coefficiente angolare* in quanto è legata all'angolo α tra la retta ed il semiasse positivo delle x

dalla relazione $m = \tan\alpha$, pertanto $m > 0$ significa retta inclinata $\nearrow$ oppure $\swarrow$, mentre $m < 0$ significa retta inclinata $\searrow$ oppure $\nwarrow$. Se $m = 0$ la retta è orizzontale. La costante q è detta *ordinata all'origine* in quanto è l'ordinata del punto della retta con ascissa nulla.

Osserviamo che, davanti al problema *determina l'equazione della retta passante per i punti A e B*, il modo più semplice per procedere è di confrontare x_A e x_B: se $x_A = x_B$ allora la retta è verticale e la sua equazione è $x = x_A$ (o equivalentemente $x = x_B$), se invece $x_A \neq x_B$ allora la retta non è verticale e si può utilizzare l'equazione della retta in forma esplicita. Imponendo il passaggio A e da B e mettendo a sistema, si ottengono immediatamente m e q

$$\begin{cases} y_A = mx_A + q \\ y_B = mx_B + q \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad m, q.$$

Come noto, due rette sono parallele se non hanno punti in comune. Pertanto, se le rette di equazioni $r : ax+by+c = 0$ e $s : a'x + b'y + c' = 0$ sono parallele, mettendo a sistema le loro equazioni si ottiene un sistema impossibile. Questo si verifica se il rapporto tra i coefficienti della x e della y è lo stesso, ma differisce dal rapporto dei termini noti, ossia

$$r \parallel s \iff \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}.$$

Nel caso particolare $a/a' = b/b' = c/c'$, le due rette coincidono ed il sistema ha infinite soluzioni (tutti i punti delle rette). Siccome $m = -a/b$, la condizione di parallelismo tra due rette equivale a dire $a/a' = b/b' \iff -a/b = -a'/b' \iff m = m'$. Pertanto, due rette parallele hanno lo stesso coefficiente angolare

$$r \parallel s \iff m = m'.$$

Un altro caso particolare è quello di rette incidenti e perpendicolari tra loro. Come noto (tralasciamo la dimostrazione), questo si verifica se il prodotto dei coefficienti angolari è pari a -1, ossia

$$r \perp s \iff m \cdot m' = -1.$$

Ricordiamo, infine, che la distanza di un punto (x_0, y_0) dalla generica retta in forma implicita $ax + by + c = 0$ è data dalla formula

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

1.2 Interpretazione vettoriale della retta

Con riferimento alla figura 2, vogliamo determinare la retta passante per il punto $Q(x_0, y_0)$ e *perpendicolare* al vettore $\vec{n}(a, b)$. Indichiamo con $P(x, y)$ un generico punto di questa retta e con $\overrightarrow{QP}$ il vettore spiccato da (x_0, y_0) e che punta verso il punto (x, y), ossia $\overrightarrow{QP}(x - x_0, y - y_0)$. Siccome il vettore $\overrightarrow{QP}$ giàce sulla retta, e la retta è perpendicolare al vettore $\vec{n}$, allora il prodotto scalare tra questi due vettori deve essere nullo:

$$\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n} = 0 \iff (x - x_0, y - y_0) \cdot (a, b) = 0$$

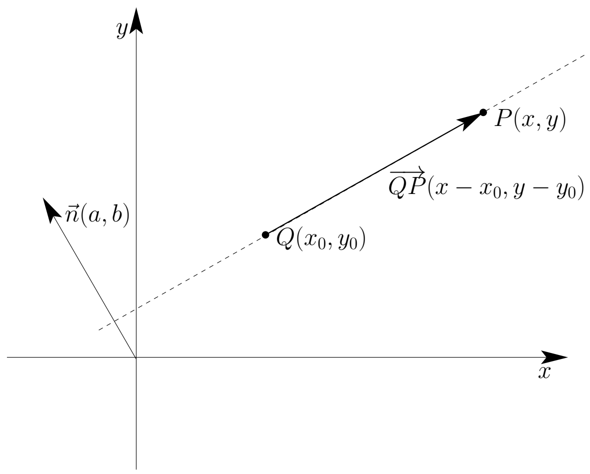

Figura 2: Retta nel piano passante per il punto $Q(x_0, y_0)$ e *perpendicolare* al vettore $\vec{n}(a, b)$

Ricordando che il prodotto scalare tra due vettori è pari alla somma dei prodotti delle componenti omologhe, svolgendo i conti si ottiene

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \iff ax + by - (ax_0 + by_0) = 0,$$

da cui, introducendo $c = -(ax_0 + by_0)$ si ottiene l'equazione della generica retta in forma implicita

$$ax + by + c = 0.$$

Osserviamo che, grazie a questa formulazione, le costanti a e b acquistano un significato ben preciso in quanto sono le componenti del vettore perpendicolare alla retta. Da questa osservazione si deduce facilmente che due rette di equazioni $r : ax + by + c = 0$ e $s : a'x + b'y + c' = 0$ sono parallele se sono entrambe ortogonali allo stesso vettore, ossia se i vettori (a, b) e (a', b') sono tra loro paralleli

$$(a, b) \parallel (a', b') \iff \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \iff m = m'.$$

Allo stesso modo, le due rette r ed s sono ortogonali se è nullo il prodotto scalare tra i vettori cui esse sono perpendicolari, ossia

$$(a, b) \cdot (a', b') = 0 \iff aa' + bb' = 0 \iff \frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = -1,$$

da cui

$$m \cdot m' = -1.$$

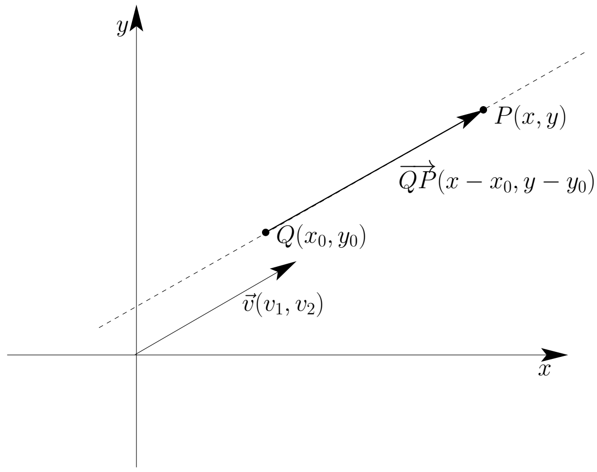

Figura 3: Retta nel piano passante per il punto $Q(x_0, y_0)$ e *parallela* al vettore $\vec{v}(v_1, v_2)$

Con riferimento alla figura 3, vogliamo ora determinare la retta passante per il punto $Q(x_0, y_0)$ e *parallela* al vettore $\vec{v}(v_1, v_2)$. Se $P(x, y)$ denota sempre un generico punto di questa retta e $\overrightarrow{QP}(x - x_0, y - y_0)$ il vettore spiccato da (x_0, y_0) e che punta verso il punto (x, y), allora $\overrightarrow{QP}$ deve essere parallelo a $\vec{v}$, ossia

$$\overrightarrow{QP} = t\vec{v} \iff (x - x_0, y - y_0) = t(v_1, v_2),$$

dove $t \in \mathbb{R}$ è un generico paramentro che può assumere un qualsiasi valore. Separando nelle due componenti si ottiene

$$\begin{cases} x - x_0 = v_1 t \\ y - y_0 = v_2 t. \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t. \end{cases} \tag{1.1}$$

Questa versione della retta viene detta *parametrica* in quanto al variare del parametro t si ottengono tutti i punti della retta stessa. Ovviamente $t = 0$ corrisponde al punto (x_0, y_0).

Vediamo come l'equazione generica della retta passante per due punti possa essere interpretata alla luce della versione parametrica. Osserviamo che, siccome

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \tag{1.2}$$

allora possiamo certamente scrivere

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = t \quad \text{e} \quad \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = t, \quad \text{con} \quad t \in \mathbb{R},$$

da cui

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t \\ y = y_A + (y_B - y_A)t. \end{cases}$$

Confrontando questa espressione con le equazioni (1.1) si evince che $x_B - x_A = v_1$ e $y_B - y_A = v_2$, ossia la retta passante per i punti A e B descritta dall'equazione (1.2) è (correttamente) la retta passante per il punto $A(x_A, y_A)$ e parallela al vettore $\vec{v} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$.

2 Geometria analitica nello spazio

2.1 Punti nello spazio

Come naturale estensione dal piano bidimensionale allo spazio tridimensionale, ogni punto è caratterizzato da tre coordinate, x, y, z. I tre assi sono mutualmente ortogonali secondo la regola della mano destra, quindi, per esempio, se l'asse x è diretto come il pollice, allora l'asse y è necessariamente nella direzione dell'indice e l'asse z nella direzione del medio.

Dati 2 punti nello spazio, $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$, il loro punto medio M ha coordinate

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right),$$

mentre la loro distanza è

$$d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}.$$

2.2 L'equazione di un piano

Vogliamo determinare l'equazione del piano passante per il punto $Q(x_0, y_0, z_0)$ e *perpendicolare* al vettore $\vec{n}(a, b, c)$. Come fatto per la retta, indichiamo con $P(x, y, z)$ un generico punto del piano e con $\overrightarrow{QP}$ il vettore spiccato da $Q(x_0, y_0, z_0)$ e che punta verso $P(x, y, z)$, ossia $\overrightarrow{QP}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Siccome il vettore $\overrightarrow{QP}$ giàce sul piano, allora è perpendicolare al vettore $\vec{n}$, pertanto il prodotto scalare tra questi due vettori deve essere nullo:

$$\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n} = 0 \iff (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0,$$

da cui, svolgendo i conti,

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

ossia

$$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0.$$

Introducendo $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$ si ottiene l'equazione del generico piano in forma implicita

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Osserviamo che le costanti a, b e c hanno un significato ben preciso in quanto sono le componenti del vettore perpendicolare al piano. Pertanto se $a = 0$ il piano è parallelo all'asse x, se $b = 0$ il piano è parallelo all'asse y, se $c = 0$ il piano è parallelo all'asse z. Se $d = 0$ allora il piano passa per l'origine degli assi. Inoltre, se $a = b = 0$ il piano è simultaneamente parallelo agli assi x e y, quindi è parallelo al piano xy e ortogonale all'asse z, se $a = c = 0$ il piano è simultaneamente parallelo agli assi x e z, quindi è parallelo al piano xz e ortogonale all'asse y, se $b = c = 0$ il piano è simultaneamente parallelo agli assi y e z, quindi è parallelo al piano yz e ortogonale all'asse x.

Possiamo ora determinare le condizioni sotto le quali due piani di equazioni $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ e $\beta : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sono tra loro paralleli o perpendicolari. Se due piani sono paralleli tra loro, allora i vettori cui sono rispettivamente perpendicolari sono anch'essi paralleli tra loro, quindi i vettori (a, b, c) e (a', b', c') sono tra loro paralleli e

$$\begin{aligned} (a, b, c) \parallel (a', b', c') \quad &\iff \quad (a, b, c) = k(a', b', c') \\ &\iff \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k. \end{aligned}$$

Nel caso particolare in cui $k = d/d'$, allora i due piani coincidono (sono lo stesso piano). I piani α e β sono ortogonali tra loro se anche i vettori cui essi sono perpendicolari sono ortogonali tra loro, ossia se il prodotto scalare tra (a, b, c) e (a', b', c') è nullo:

$$\begin{aligned} (a, b, c) \perp (a', b', c') \quad &\iff \quad (a, b, c) \cdot (a', b', c') = 0 \\ &\iff \quad aa' + bb' + cc' = 0. \end{aligned}$$

Come per la retta, anche l'equazione del piano può essere scritta in forma esplicita. Se $c \neq 0$, si può isolare z ottenendo

$$z = mx + ny + q, \quad \text{con} \quad m = -\frac{a}{c}, n = -\frac{b}{c}, q = -\frac{d}{c}.$$

Si osservi che m dà la pendenza del piano rispetto all'asse x (come nel caso della retta), mentre n dà la pendenza rispetto all'asse y. Ovviamente se $m = n = 0$ il piano è parallelo al piano xy o, equivalentemente, perpendicolare all'asse z.

Un esercizio classico è la determinazione del piano passante per tre punti $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ non allineati (l'equivalente della retta passante per due punti del caso piano). Come nel caso della retta, la prima cosa da indagare è se ci siano o meno tre coordinate omologhe uguali perché, se ci sono, allora il piano è ortogonale all'asse le cui coordinate coincidono. Per esempio, se $x_A = x_B = x_C = x_0$ allora il piano è ortogonale all'asse x e la sua equazione è $x = x_0$. Si osservi che, in questo caso, il piano è parallelo al piano yz, pertanto $b = c = 0$. Se il piano non è perpendicolare ad uno degli assi coordinati, allora almeno due tra i tre coefficienti a, b, c sono diversi da zero, per cui è possibile scrivere l'equazione del piano in forma *esplicita* isolando dall'equazione in forma implicita una delle tre incognite (non necessariamente la z come visto in precedenza). Così facendo le costanti da terminare si riducono solo a tre, pertanto se il piano esiste basta risolvere il sistema che si ottiene imponendo il passaggio per i tre punti. Per esempio, se $c \neq 0$, esplicitando z si ha

$$\begin{cases} z_A = mx_A + ny_A + q \\ z_B = mx_B + ny_B + q \\ z_C = mx_C + ny_C + q \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad m, n, q.$$

Evitando la dimostrazione, concludiamo con la formula della distanza del punto (x_0, y_0, z_0) dal generico piano in forma implicita $ax + by + cz + d = 0$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Si osservi che questa formula è la naturale estensione della distanza di un punto da una retta nel caso piano.

2.3 L'equazione di una retta

Una retta nello spazio a tre dimensioni può sempre essere pensata come il luogo geometrico dei punti di intersezione tra due piani non paralleli. Pertanto un primo modo di scrivere l'equazione di una retta è sotto forma di sistema tra due piani

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0. \end{cases}$$

Chiaramente, essendo le incognite tre e le equazioni solo due, vi saranno infinite soluzioni che sono, appunto, tutti i punti della retta. Se si esplicitano due variabili in funzione della terza, le due equazioni prendono il nome di *equazioni ridotte*.

L'altro approccio consiste nel determinare l'equazione della retta passante per il punto $Q(x_0, y_0, z_0)$ e *parallela* al vettore $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$. Se $P(x, y, z)$ denota sempre un generico punto di questa retta e $\overrightarrow{QP}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ è il vettore spiccato da $Q(x_0, y_0, z_0)$ e che punta verso $P(x, y, z)$, allora $\overrightarrow{QP}$ deve essere parallelo a $\vec{v}$, ossia

$$\overrightarrow{QP} = t\vec{v} \iff (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(v_1, v_2, v_3),$$

dove $t \in \mathbb{R}$ è un generico parametro che può assumere un qualsiasi valore. Separando nelle tre componenti si ottiene

$$\begin{cases} x - x_0 = v_1 t \\ y - y_0 = v_2 t \\ z - z_0 = v_3 t, \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \\ z = z_0 + v_3 t. \end{cases} \tag{2.3}$$

Questa versione della retta viene detta *parametrica* in quanto al variare del parametro t si ottengono tutti i punti della retta stessa. Ovviamente $t = 0$ corrisponde al punto (x_0, y_0, z_0).

Per quanto visto nel caso piano, la retta in forma parametrica è equivalente a quella passante per due punti. Pertanto anche nel caso tridimensionale la retta generica passante per due punti che non abbiano componenti omologhe uguali, ossia per i quali $x_A \neq x_B \wedge y_A \neq y_B \wedge z_A \neq z_B$, si può scrivere nella forma

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}. \tag{2.4}$$

Osserviamo che la retta in forma parametrica è ottenibile pensando di dover determinare la retta passante per A e parallela al vettore $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.

La scrittura di una retta in forma parametrica consente di determinare velocemente la posizione reciproca tra due rette. Infatti, se la retta r è parallela al vettore $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e la retta s al vettore $\vec{v}' = (v_1', v_2', v_3')$, allora la condizione di parallelismo tra le due rette è che $\vec{v}$ e $\vec{v}'$ siano paralleli

$$\begin{aligned} r \parallel s \iff \vec{v} \parallel \vec{v}' \quad &\iff \quad (v_1, v_2, v_3) = k(v_1', v_2', v_3') \\ &\iff \quad \frac{v_1}{v_1'} = \frac{v_2}{v_2'} = \frac{v_3}{v_3'} = k. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la condizione di perpendicolarità, occorre che $\vec{v}$ e $\vec{v}'$ siano perpendicolari tra loro, ossia che il loro prodotto scalare sia nullo:

$$\begin{aligned} r \perp s \iff \vec{v} \perp \vec{v}' \quad &\iff \quad (v_1, v_2, v_3) \cdot (v_1', v_2', v_3') = 0 \\ &\iff \quad v_1 v_1' + v_2 v_2' + v_3 v_3' = 0. \end{aligned}$$

Analogamente, dati il piano α e la retta r

$$\alpha : ax + by + cz + d, \qquad r : \begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \\ z = z_0 + v_3 t, \end{cases}$$

essendo il vettore (a, b, c) ortogonale al piano, si ha

$$\begin{aligned} \alpha \parallel r \quad &\iff \quad (a, b, c) \perp (v_1, v_2, v_3) \\ &\iff \quad av_1 + bv_2 + cv_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha \perp r \quad &\iff \quad (a, b, c) \parallel (v_1, v_2, v_3) \\ &\iff \quad \frac{a}{v_1} = \frac{b}{v_2} = \frac{c}{v_3} = k. \end{aligned}$$

3 Alcune superfici notevoli

La prima naturale estensione dalla geometria piana a quella nello spazio è quella dalla circonferenza alla sfera. Essendo la sfera il luogo geometrico dei punti dello spazio equidistanti da un punto fisso (x_0, y_0, z_0) detto centro, se r è il raggio allora l'equazione della supoerficie sferica è

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2,$$

che può essere riscritta in *forma canonica* come

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0,$$

con $a = -2x_0$, $b = -2y_0$, $c = -2z_0$ e $d = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2$. Invertendo queste uguaglianze si deducono facilmente le coordinate del centro e la lunghezza del raggio noti a, b, c

$$C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right), \quad r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d}.$$

Un'altra superficie notevole è l'elissoide di rotazione con centro in (x_0, y_0, z_0) e semiassi a, b, c (naturale estensione dell'ellisse)

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1.$$

4 Esercizi

1. Dati i punti $A(1, 6, -1)$, $B(-2, 1, 1)$ e $C(-1, 0, -1)$: (a) determina l'equazione del piano α passante per essi; (b) determina le coordinate del baricentro G del triangolo che ha per vertici i tre punti; (c) verifica che $G \in \alpha$.

2. Sono dati due piani α e β di equazioni

$$\alpha : 3x - 11y + z = -2 \qquad \text{e} \qquad \beta : x - 4y + 2z = 3.$$

(a) Verificare che la retta r di equazione parametrica

$$r : \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

appartiene al piano α.
(b) Determinare l'equazione parametrica della retta s intersezione dei due piani α e β.
(c) Verificare che la retta s è parallela al vettore $\vec{v} = (18; 5; 1)$.

3. Determina se i punti $A(1, 6, -1)$, $B(-2, 1, 1)$ e $C(4, 11, -3)$ sono allineati.

4. Determina il volume del tetraedro che ha per vertici l'origine del sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ ed i punti di intersezione tra il piano α di equazione $3x + 2y + 6z - 6 = 0$ e gli assi coordinati.

5. Determina se le rette r ed s di equazioni

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 4 - t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

si intersecano o meno in un punto. In caso affermativo, determinane le coordinate.

6. Determina se le rette r ed s di equazioni

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + t \\ z = t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} z = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

si intersecano o meno in un punto. In caso affermativo, determinane le coordinate.

7. Determina se le rette r ed s di equazioni

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 \\ z = 3 - t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + z = 0 \\ x - y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

si intersecano o meno in un punto. In caso affermativo, determinane le coordinate.

8. Una sfera, il cui centro è il punto $K(-2, -1, 2)$, è tangente al piano Π avente equazione $2x - 2y + z - 9 = 0$. Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera?
Esame di stato Liceo Scientifico e Scienze Applicate, 2016, sessione ordinaria, quesito 5

9. Date le rette

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

e il punto $P(1, 0, -2)$ determinare l'equazione del piano passante per P e parallelo alle due rette.
Esame di stato Liceo Scientifico e Scienze Applicate, 2016, sessione ordinaria, quesito 9

10. I punti $A(3, 4, 1)$, $B(6, 3, 2)$, $C(3, 0, 3)$, $D(0, 1, 2)$ sono i vertici di un quadrilatero $ABCD$. Si dimostri che tale quadrilatero è un parallelogramma e si controlli se esso è un rettangolo.
Esame di stato Liceo Scientifico e Scienze Applicate, 2016, sessione suppletiva, quesito 6

11. Determinare la distanza tra il punto $P(2, 1, 1)$ e la retta

$$\begin{cases} x + y = z + 1 \\ z = -y + 1. \end{cases}$$

Esame di stato Liceo Scientifico e Scienze Applicate, 2016, sessione suppletiva, quesito 7

12. Dati i punti $A(2, 4, -8)$ e $B(-2, 4, -4)$, determinare l'equazione della superificie sferica di diametro AB e l'equazione del piano tangente alla sfera e passante per A.
Esame di stato Liceo Scientifico e Scienze Applicate, 2016, sessione straordinaria, quesito 4

13. Dati i punti $A(-2, 0, 1)$, $B(1, 1, 2)$, $C(0, -1, -2)$, $D(1, 1, 0)$, determinare l'equazione del piano α passante per i punti A, B, C e l'equazione della retta passante per D e perpendicolare al piano α.
Esame di stato Liceo Scientifico e Scienze Applicate, 2016, sessione straordinaria, quesito 9

14. Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nell'origine al piano di equazione $x + y - z = 0$.
Esame di stato Liceo Scientifico e Scienze Applicate, 2015, sessione ordinaria, quesito 5

15. In un sistema di riferimento cartesiano nello spazio $Oxyz$ sono dati i punti $A(-3, 4, 0)$ e $C(-2, 1, 2)$. I tre punti O, A e C giacciono su un piano E. Determinare l'equazione che descrive il piano E.
Esame di stato Liceo Scientifico e Scienze Applicate, 2015, sessione suppletiva, quesito 4

16. Nello spazio sono dati due piani α e β rispettivamente di equazione:
$$\begin{aligned} \alpha: &\quad x - 3y + z - 5 = 0 \\ \beta: &\quad x + 2y - z + 3 = 0. \end{aligned}$$
Dopo aver determinato l'equazione parametrica della retta r da essi individuata, verificare che essa appartiene al piano γ di equazione $3x + y - z + 1 = 0$.
Esame di stato Liceo Scientifico e Scienze Applicate, 2015, sessione straordinaria, quesito 4

17. Trovare l'equazione del piano tangente alla superficie sferica avente come centro l'origine e raggio 2, nel suo punto di coordinate $(1, 1, z)$, con z negativa.
Simulazione MIUR Esame di Stato Liceo Scientifico, 22 aprile 2015, quesito 7

18. Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nel punto $(1, 1, 1)$ al piano di equazione $2x - 3y + z = 0$.
Simulazione MIUR Esame di Stato Liceo Scientifico, 10 dicembre 2015, quesito 3

19. In un riferimento cartesiano nello spazio $Oxyz$, data la retta r di equazioni:
$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = kt \end{cases}$$
e il piano β di equazione $x + 2y - z + 2 = 0$, determinare per quali valori di k la retta r e il piano β sono paralleli, e la distanza tra di essi.
Simulazione MIUR Esame di Stato Liceo Scientifico, 29 aprile 2016, quesito 9

Soluzione/risoluzione degli esercizi

1. (a) Preliminarmente osserviamo che le x dei punti non sono tutte uguali, né le y né le z, questo significa che il piano non è perpendicolare ad uno degli assi coordinati (se una coordinata fosse la stessa per tutti i punti, il piano sarebbe ortogonale a quell'asse coordinato). Ci sarebbe da verificare l'eventuale allineamento dei punti, ma se riusciamo a trovare il piano evidentemente non lo sono. Consideriamo l'equazione del piano in forma implicita $ax + by + cz + d = 0$ e imponiamo il passaggio per i tre punti:
$$\begin{cases} a + 6b - c + d = 0 \\ -2a + b + c + d = 0 \\ -a - c + d = 0. \end{cases}$$
Il sistema di tre equazioni in quattro incognite è, evidentemente, indeterminato nel senso che ci sono infinite soluzioni dipendenti da uno dei quattro parametri. Possiamo quindi risolvere il sistema esprimendo la soluzione in fuzione di uno di questi parametri, per esempio possiamo tenere come incognite a, b, c ed esprimerli in funzione di d. Isoliamo a dall'ultima equazione, $a = -c + d$ e la sostituiamo nelle altre due ottenendo
$$\begin{cases} -c + d + 6b - c + d = 0 \\ -2(-c + d) + b + c + d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6b - 2c = -2d \\ b + 3c = d \end{cases}$$
Isolando $b = d - 3c$ dall'ultima e sostituiendolo nell'altra equazione si ha $6(d - 3c) - 2c = -2d \iff 6d - 18c - 2c = -2d \implies c = \frac{2}{5}d$. Sostituendo all'indietro si ottiene $b = d - 3c = -\frac{1}{5}d$ e $a = -c + d = \frac{3}{5}d$. In definitiva, l'equazione del piano è $\frac{3}{5}dx - \frac{1}{5}dy + \frac{2}{5}d + d = 0$ che, dopo aver moltiplicato per 5 e diviso per d, è equivalente a $\alpha : 3x - y + 2z + 5 = 0$. Per controllare la correttezza dell'equazione trovata, basta sostituire le coordinae dei punti nell'equazione del piano e verificare che è soddisfatta.

L'equazione del piano può essere determinata anche partendo dalla forma implicita $ax + by + cz + d = 0$ e riscrivendo l'equazione del piano in forma esplicita, isolando $z = mx + ny + q$ e imponendo il passaggio per i tre punti:
$$\begin{cases} -1 = m + 6n + q \\ 1 = -2m + n + q \\ -1 = -m + q \end{cases} \implies \begin{cases} m = -\frac{3}{2} \\ n = \frac{1}{2} \\ q = -\frac{5}{2}, \end{cases}$$
da cui $z = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{5}{2}$, ossia $\alpha : 3x - y + 2z + 5 = 0$.
(b) Le coordinate del baricentro sono semplicemente
$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = -\frac{2}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{7}{3} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$
(c) Sostituendo nell'equazione del piano α si ha $3\left(-\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{7}{3}\right) + 2\left(-\frac{1}{3}\right) + 5 = 0 \iff -2 - \frac{7}{3} - \frac{2}{3} + 5 = 0 \iff -2 - 3 + 5 = 0 \iff 0 = 0$, ossia il punto G appartiene al piano α.

2. (a) Sostituendo l'equazione parametrica della retta r nell'equazione del piano α si ha $3(2 + 4t) - 11(1 + t) + (3 - t) = -2 \iff 6 + 12t - 11 - 11t + 3 - t = -2 \iff 0 = 0$, pertanto l'equazione è soddisfatta per ogni $t \in \mathbb{R}$ e la retta r appartiene al piano α.
(b) L'equazione della retta s si trova mettendo a sistema le equazioni dei due piani. Questo, ovviamente, dà origine ad un sistema indeterminato (tutti i punti

della retta sono soluzioni), che deve essere risolto introducendo un parametro libero t. Se scegliamo $z = t$ si ha:

$$\begin{cases} 3x - 11y + z = -2 \\ x - 4y + 2z = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -41 + 18t \\ y = -11 + 5t \\ z = t \end{cases}$$

(c) Dalla scrittura precedente è evidente che la retta passa per il punto $P(-41; -11; 0)$ ed è parallela al vettore $\vec{v} = (18; 5; 1)$.

3. Tre punti sono allineati se la retta passante da due di essi passa anche dal terzo, ovvero sostituendo le coordinate del terzo nella retta passante tra gli altri due si ottiene una identità. Determiniamo la retta passante da $A(1, 6, -1)$ e $B(-2, 1, 1)$. La retta è parallela al vettore $\overrightarrow{AB} = (-3, -5, 2)$ e passa per A, pertanto le sue equazioni parametriche sono

$$r : \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 6 - 5t \\ z = -1 + 2t. \end{cases}$$

Se il punto $C(4, 11, -3)$ appartiene alla retta allora ne soddisfa l'equazione parametrica. Risolvendo $4 = 1 - 3t$ si ottiene $t = -1$, che sostituito nella retta fornisce proprio il punto di coordinate $(4, 11, -3)$, ossia il punto C. In conclusione, i tre punti *sono allineati* lungo la retta r.

4. Il solido ha come vertici, oltre all'origine, i tre punti $A(x, 0, 0)$, $B(0, y, 0)$ e $C(0, 0, z)$. Sostituendo nell'equazione del piano $\alpha : 3x + 2y + 6z - 6 = 0$ si ottengono immediatamente le coordinate dei tre punti $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$ e $C(0, 0, 1)$. Essendo il tetradro una piramide di base OAB e altezza OC, il suo volume è $V = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2 \times 3}{2} \times 1 = 1$.

5. Riscrivendo la retta s in forma parametrica si può immediatamente capire se le rette sono parallele o meno. Nel caso non lo siano, si può cercare di determinare l'eventuale punto di intersezione: se esiste, allora sono incidenti, altrimenti sono *sghembe*. Per riscrivere s in forma parametrica, esprimiamo tutte tre le coordinate in funzione di z

$$\begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z - 1 \\ y = z + 1 \\ z = z \end{cases}$$

e poi introduciamo $z = h$ (perché il parametro della retta s è diverso da quello della retta r) ottenendo

$$\begin{cases} x = -1 + h \\ y = 1 + h \\ z = h. \end{cases}$$

Pertanto s è parallela al vettore $(1, 1, 1)$. Siccome r è parallela al vettore $(1, 3, -1)$, possiamo concludere che le due rette *non sono parallele*. Per determinare l'eventuale punto di intersezione basta sostituire le equazioni parametriche di r nelle due che definiscono s: se si ottiene un solo valore di t allora le rette si intersecano, se invece non è così le rette non hanno punti in comune.

$$\begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (1 + t) - (4 - t) + 1 = 0 \\ (1 + 3t) - (4 - t) - 1 = 0. \end{cases}$$

Dalla prima si ottiene $2t - 2 = 0 \implies t = 1$, dalla seconda $4t - 40 \implies t = 1$. Siccome da entrambe le equazioni è scaturito lo stesso valore di t, allora il punto in comune esiste e le sue coordinate si ricavano sostituendo $t = 1$ nell'equazione parametrica di r ottenendo $P(2, 4, 3)$. Si verifica immediatamente che $P \in s$, pertanto le coordinate del punto sono corrette.

6. Riscrivendo la retta s in forma parametrica si può immediatamente capire se le rette sono parallele o meno. Nel caso non lo siano, si può cercare di determinare l'eventuale punto di intersezione: se esiste, allora sono incidenti, altrimenti sono *sghembe*. Per riscrivere s in forma parametrica, esprimiamo tutte tre le coordinate in funzione di y

$$\begin{cases} z = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y - 1 \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$$

e poi introduciamo $y = h$ (perché il parametro della retta s è diverso da quello della retta r) ottenendo

$$\begin{cases} x = -1 - 2h \\ y = h \\ z = 0. \end{cases}$$

Pertanto s è parallela al vettore $(-2, 1, 0)$. Siccome r è parallela al vettore $(1, 1, 1)$, possiamo concludere che le due rette *non sono parallele*. Per determinare l'eventuale punto di intersezione basta sostituire le equazioni parametriche di r nelle due che definiscono s: se si ottiene un solo valore di t allora le rette si intersecano, se invece non è così le rette non hanno punti in comune.

$$\begin{cases} z = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 0 \\ (1 + t) + 2(3 + t) + 1 = 0 \end{cases}$$

La prima fornisce immediatamente $t = 0$, mentre la seconda $3t + 8 = 0 \implies t = -8/3$. Siccome t deve essere unico (l'eventuale punto di intersezione tra due rette non parallele, se esiste, è unico) concludiamo che le due rette non si intersecano in un punto e non sono parallele, pertanto *sono sghembe*.

7. Riscrivendo la retta s in forma parametrica si può immediatamente capire se le rette sono parallele o meno. Nel caso non lo siano, si può cercare di determinare l'eventuale punto di intersezione: se esiste, allora sono incidenti, altrimenti sono *sghembe*. Per riscrivere s in forma parametrica, esprimiamo tutte tre le coordinate in funzione di z

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x - y + z + 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = x + z + 4 = 4 \\ z = z \end{cases}$$

e poi introduciamo $z = h$ (perché il parametro della retta s è diverso da quello della retta r) ottenendo

$$\begin{cases} x = -h \\ y = 4 \\ z = h. \end{cases}$$

Pertanto s è parallela al vettore $(-1, 0, 1)$. Siccome r è parallela al vettore $(1, 0, -1)$, possiamo concludere che le due rette *sono parallele*. Oltre ad essere parallele, le due rette potrebbero essere *coincidenti*: se fosse così,sostituendo le equazioni parametriche di r nelle due che definiscono s si otterrebbe un sistema soddisfatto per ogni t. Ovviamente se non fosse così le rette sarebbero parallele e distinte. Sostituendo si ha

$$\begin{cases} (2 + t) + (3 - t) = 0 \\ (2 + t) - (2) + (3 - t) + 4 = 0. \end{cases}$$

La prima dà $5 = 0$, che è impossibile, la seconda $7 = 0$, anch'essa impossibile. Siccome le due rette sono parallele allo stesso vettore $(-1, 0, 1)$ e non hanno punti in comune, concludiamo che sono *parallele*.

8. Il punto di tangenza è l'intersezione tra Π e la retta r passante per K e ortogonale a Π. Siccome il piano è ortogonale al vettore $(2, -2, 1)$, allora r è parallela proprio a questo vettore, pertanto la sua forma parametrica è

$$r : \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t. \end{cases}$$

Mettendo a sistema l'equazione delle retta r con quella del piano Π si ottiene

$$\begin{cases} 2x - 2y + z - 9 = 0 \\ x = -2 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t. \end{cases}$$

da cui, sostituendo dalla retta nel piano, $2(-2+2t) - 2(-1 - 2t) + (2 + t) - 9 = 0 \iff 9t - 9 = 0 \implies t = 1$, sostituendo nella retta $t = 1$ si ottiene il punto $T(0, -3, 3)$. Il raggio è banalmente la distanza TK, pertanto $r = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (-1 + 3)^2 + (2 - 3)^2} = 3$.

9. Chiamiamo le rette rispettivamente r ed s, pertanto

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y = 0. \end{cases}$$

Il punto più delicato della risoluzione è la determinazione del vettore $\vec{n} = (a, b, c)$ cui il piano è perpendicolare, perché una volta scritta l'equazione generica $ax+by+cz+d = 0$, il coefficiente d si ottiene immediatamente imponendo il passaggio del piano per il punto $P(1, 0, -2)$. Siccome il piano deve essere parallelo ad entrambe le rette, e la prima retta è parallela al vettore $\vec{v}_1(1, 2, 1)$, il prodotto scalare tra questi vettori deve essere nullo, ossia $(a, b, c) \cdot (1, 2, 1) = 0$. Sviluppando i conti si ottiene $a + 2b + c = 0$. Possiamo ripetere lo stesso ragionamento per la retta s, ma la dobbiamo prima riscrivere in forma parametrica: ricavando $y = 2x$ dalla seconda equazione e $z = -x - y + 3$ dalla prima, ossia $z = -3x + 3$, si ha

$$s : \begin{cases} x = x \\ y = 2x \\ z = 3 - 3x \end{cases} \iff \begin{cases} x = h \\ y = 2h \\ z = 3 - 3h \end{cases}$$

da cui si ottiene che la retta s è parallela al vettore $\vec{v}_2 = (1, 2, -3)$. Imponendo la perpendicolarità tra (a, b, c) e $(1, 2, -3)$ si ottiene $(a, b, c) \cdot (1, 2, -3) = 0 \implies a + 2b - 3c = 0$. Mettendo a sistema le due relazione in a, b, c si ha

$$\begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ a + 2b - 3c = 0. \end{cases}$$

Sottraendo le due equazioni si ottiene immediatamente $c = 0$ e $a = -2b$, pertanto il piano cercato deve essere perpendicolare al generico vettore $\vec{n}(-2b, b, 0)$. Scegliendo, per semplicità, $b = 1$, si ha $\vec{n} = (-2, 1, 0)$, da cui il piano $-2x + y + d = 0$. Imponendo il passaggio per $P(1, 0, -2)$ si ottiene $d = 2$, da cui l'equazione del piano $2x - y - 2 = 0$.

10. Il quadrilatero è un parallelogramma se i lati sono paralleli due a due, ossia se la retta AB è parallela alla retta CD e la rette BC e DA sono parallele tra loro. Invece di determinare l'espressione di tutte quattro le rette, ci basta vedere i vettori cui esse sono parallele. $\vec{v}_{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (3, -1, 1)$, procedendo allo stesso modo si ottiene $\vec{v}_{CD} = (-3, 1, -1)$, che è evidentemente opposto a $\vec{v}_{AB}$, quindi i lati AB e CD sono certamente paralelli. Si ha poi $\vec{v}_{BC} = (-3, -3, 1)$ e $\vec{v}_{DA} = (3, 3, -1)$, che è opposto a $\vec{v}_{BC}$, quindi anche i lati BC e DA sono tra loro paralleli. Possiamo, quindi, concludere che il quadrilatero è un *parallelogramma*. Per vedere se è un rettangolo, basta verificare se due lati consecutivi sono *perpendicolari* tra loro, ossia se il prodotto scalare tra i vettori cui sono paralleli è nullo. Calcoliamo $\vec{v}_{AB} \cdot \vec{v}_{BC} = (3, -1, 1) \cdot (-3, -3, 1) = -9 + 3 + 1 = -5 \neq 0$, pertanto il parallelogramma *non è* un rettangolo.

11. La distanza tra il punto $P(2, 1, 1)$ e la retta è la *minima* distanza tra un punto *qualsiasi* della retta ed il punto P. In alternativa, è la lunghezza del segmento PH, essendo H il punto di intersezione tra la retta data e quella perpendicolare alla retta data e passante per P. In ogni caso, per procedere occorre determinare l'equazione della retta in forma paramentrica, o semplicemente il vettore $\vec{v}$ cui essa è parallela. Sostituendo $z = -y + 1$ nella prima equazione ed isolando x si ottiene $x = z + 1 - y = -y + 1 + 1 - y = 2 - 2y$, pertanto la retta è

$$\begin{cases} x = 2 - 2y \\ y = y \\ z = -y + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = t \\ z = 1 - t, \end{cases}$$

da cui il vettore della direzione della retta $\vec{v}(-2, 1, -1)$. Calcoliamo la distanza di $P(2, 1, 1)$

dal generico punto della retta e poi la minimizziamo in funzione della variabile indipendente t: $d(t) = \sqrt{(2-2t-2)^2+(t-1)^2+(1-t-1)^2} = \sqrt{4t^2+t^2-2t+1+t^2} = \sqrt{6t^2-2t+1}$. Questa distanza è minima quando l'argomento della radice è minimo, ossia nel vertice della parabola, per $t_v = -b/(2a) = 2/12 = 1/6$. Per questo valore di t si ha $d(1/6) = \sqrt{6 \times \frac{1}{36} - 2 \times \frac{1}{6} + 1} = \sqrt{\frac{5}{6}}$.

12. Il centro della sfera è il punto medio M del segmento AB, pertanto $M(0,4,-6)$. Il raggio è la distanza $AM = \sqrt{(2-0)^2+(4-4)^2+(-8+6)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$. In definitiva, l'equazione della superficie sferica è $(x-0)^2+(y-4)^2+(z+6)^2 = (2\sqrt{2})^2 \iff x^2+y^2+z^2-8y+12z+44 = 0$. Sostituendo le coordinate di A e B si verifica immediatamente che l'equazione trovata è corretta. Il piano tangente è *perpendicolare* al raggio $\overrightarrow{MA}(2-0,4-4,-8+6) = (2,0,-2)$, pertanto il piano è del tipo $2x-2z+d = 0$. Dovendo passare da $A(2,4,-8)$, sostituendo si ha immediatamente $4+16+d = 0$ da cui $d = -20$, ossia $2x-2z-20 = 0$, che è equivalente a $x-z-10 = 0$.

13. Il piano passante per i punti $A(-2,0,1)$, $B(1,1,2)$, $C(0,-1,-2)$ è del tipo $ax+by+cz+d = 0$. Anziché scriverlo in forma esplicita, possiamo imporre il passaggio per i tre punti ottendo il sistema di tre equazioni in quattro incognite
$$\begin{cases} -2a+c+d=0 \\ a+b+2c+d=0 \\ -b-2c+d=0. \end{cases}$$
Risolvendo per le incognite a,b,c si ottiene la soluzione
$$\begin{cases} a=-2d \\ b=11d \\ c=-5d, \end{cases}$$
da cui l'equazione del piano $-2dx+11dy-5dz+d = 0$, equivalente a $2x-11y+5z-1 = 0$. La retta passante per $D(1,1,0)$ e *perpendicolare* al piano $\alpha : 2x-11y+5z-1 = 0$ è chiaramente parallela al vettore $\vec{n}(2,-11,5)$, pertanto ha equazioni parametriche
$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-11t \\ z=5t. \end{cases}$$

14. Il piano è perpendicolare al vettore $\vec{n}(1,1,-1)$, pertanto la retta cercata è parallela a $\vec{n}$. Dovendo passare per l'origine, le sue equazioni parametriche sono
$$\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=-t. \end{cases}$$
Volendo scrivere la retta come intersezione di piani, possiamo uguagliare t tra la prima e la seconda e poi o tra la seconda e la terza, oppure tra la prima e la terza, nei quali casi si ottengono le due versioni
$$\begin{cases} x-y=0 \\ y+z=0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x-y=0 \\ x+z=0. \end{cases}$$

15. Il piano ha equazione generica $ax+by+cz+d = 0$, dovendo passare per l'origine si ottiene immediatamente $d = 0$, imponendo poi il passaggio per $A(-3,4,0)$ e $C(-2,1,2)$ si ha
$$\begin{cases} -3a+4b=0 \\ -2a+b+2c=0 \end{cases} \implies \begin{cases} a=\frac{8}{5}c \\ b=\frac{6}{5}c, \end{cases}$$
da cui l'equazione del piano $\frac{8}{5}cx+\frac{6}{5}cy+c = 0$, equivalente a $8x+6y+5z = 0$.

16. Per derminare l'equazione parametrica occorre risolvere il sistema tra i due piani, ricavando due delle tre incognite in funzione della terza. Risolvendo tutto in funzione di x si ha
$$r : \begin{cases} x-3y+z-5=0 \\ x+2y-z+3=0 \end{cases} \implies \begin{cases} x=x \\ y=2x-2 \\ z=5x-1 \end{cases}$$
da cui la retta in forma parametrica
$$r : \begin{cases} x=t \\ y=-2+2t \\ z=-1+5t \end{cases} \implies \vec{v}(1,2,5).$$
Per verificare che la retta r appartiene al piano $\gamma : 3x+y-z+1 = 0$ basta sostituire le sue equazioni parametriche nell'equazione del piano: $3t+(-2+2t)-(-1+5t)+1 = 0 \iff 3t-2+2t+1-5t+1 = 0 \iff 0 = 0$. Siccome l'equazione del piano è verificata per *qualsiasi* t, la retta r appartiene al piano γ.

17. L'equazione della superificie sferica con centro nell'origine e raggio $r = 2$ è banalmente $x^2+y^2+z^2-4 = 0$, da cui $z^2 = 4-x^2-y^2$. Sostituiendo le coordinate del punto $x = y = 1$ si ottiene $z = \pm\sqrt{2}$, da cui (dovendo scegliere $z < 0$) $P(1,1,-\sqrt{2})$. Si tratta ora di determinare l'equazione del piano passante per il punto P e *ortogonale* al vettore che congiunge il centro della sfera al punto P, che è proprio il vettore $\overrightarrow{OP}(1,1,-\sqrt{2})$. Pertanto il piano è $x+y-\sqrt{2}z+d = 0$, imponendo il passaggio da $P(1,1,-\sqrt{2})$ si ottiene $1+1+2+d = 0$, da cui $d = -4$, ossia $x+y-\sqrt{2}z-4 = 0$.

18. Osserviamo che il punto $(1,1,1)$ appartiene al piano, infatti le sue coordinate soddisfano l'equazione $2x-3y+z = 0$. Siccome il piano è ortogonale al vettore $\vec{n}(2,-3,1)$, la retta cercata è la retta passante per $(1,1,1)$ e *parallela* al vettore $\vec{n}(2,-3,1)$. In forma parametrica
$$r : \begin{cases} x=1+2t \\ y=1-3t \\ z=1+t. \end{cases}$$

Volendo riscrivere la retta come intersezione tra due piani, basta ricavare t dalle tre equazioni precedenti

$$\begin{cases} t = \dfrac{x-1}{2} \\ t = \dfrac{y-1}{-3} \\ t = z-1 \end{cases} \implies \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{-3} \\ \dfrac{y-1}{-3} = z-1, \end{cases}$$

da cui, sviluppando i conti

$$\begin{cases} 3x+2y-5=0 \\ y+3z-4=0. \end{cases}$$

Se avessimo uguagliato $\dfrac{x-1}{2} = z-1$, avremmo ottenuto l'equazione $x-2z+1=0$, ottenibile anche isolando $y = 4-3z$ dalla seconda e sostituendola nella prima $3x+2(4-3z)-5=0 \iff 3x+8-6z-5=0 \iff x-2z+1=0$. Pertanto, un'altra forma alternativa della retta è

$$\begin{cases} 3x+2y-5=0 \\ x-2z+1=0. \end{cases}$$

19. Il piano β di equazione $x+2y-z+2=0$ è *perpendicolare* al vettore $\vec{n}(1,2,-1)$, mentre la retta r è *parallela* al vettore $\vec{v}(2,1,k)$. Il piano e la retta sono *paralleli* tra loro se $\vec{n}$ e $\vec{v}$ sono *perpendicolari* tra loro, ossia se il loro prodotto scalare è nullo: $\vec{n} \perp \vec{v} \iff \vec{n}\cdot\vec{v} = 0 \iff (1,2,-1)\cdot(2,1,k) = 0 \implies 2+2-k=0 \implies k=4$. La distanza della retta dal piano è la distanza di un punto *qualsiasi* della retta dal piano. Come punto particolare prendiamo quello per $t=0$, ossia $P(1,1,0)$. Applicando la formuletta si ha

$$d = \frac{|1+2-1+2|}{\sqrt{1^2+2^2+0+2}} = \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5}{6}\sqrt{6}.$$

Si noti che questa distanza, ottenuta per $t=0$, è indipendente dal valore di k.