

# Un approccio alla legge di Faraday-Neumann

Simone Zuccher

2 giugno 2016

## Indice

1	Esperimenti e parole di Faraday	1
2	Una dimostrazione convincente	2
3	Una osservazione importante	3

## 1 Esperimenti e parole di Faraday

Il fenomeno dell'induzione elettromagnetica fu scoperto indipendentemente da Michael Faraday (vedi figura 1) nel 1831 e da Joseph Henry<sup>1</sup> nel 1832, tuttavia Faraday fu il primo a pubblicare i propri risultati (per un resoconto dettagliato della vita e delle lettere di Faraday si vedano i due volumi [1, 2] scritti da Bence Jones, segretario della Royal Institution).

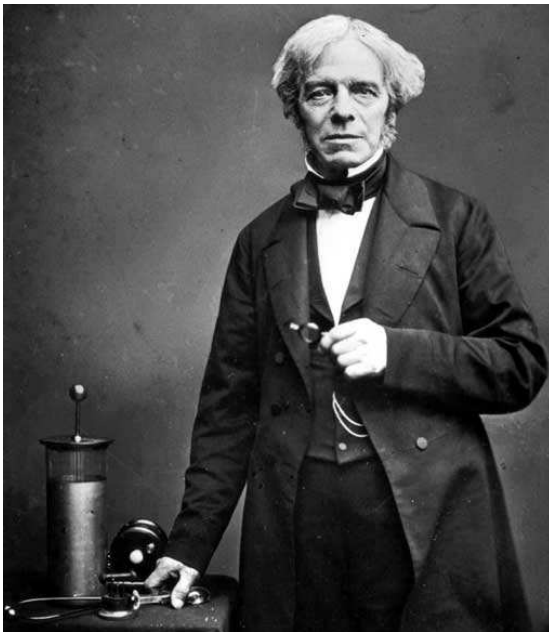


Figura 1: Michael Faraday, nato il 22 settembre 1791 a Newington Butts, Inghilterra, morto il 25 agosto 1867 (all'età di 75 anni) a Hampton Court, Middlesex, Inghilterra.

Il 29 agosto del 1831, Faraday iniziò le sue “Electrical Researches” intitolando il primo paragrafo delle sue note di laboratorio *Experiments on the production of electricity from magnetism* (gli esperimenti sull'induzione elettromagnetica sono descritti dettagliatamente nel secondo volume [2]).

Nel suo primo esperimento, riportato in figura 2, Faraday prese un anello di ferro dolce che si era fatto costruire appositamente e vi arrotolò del filo di rame da una parte (A) e, separatamente, dalla parte opposta (B) senza che le due sezioni di filo fossero in contatto diretto tra loro. Queste le sue parole: *I have had an iron ring made (soft iron), iron round and  $\frac{7}{8}$ ths of an inch thick, and ring six inches in external diameter. Wound many coils of copper round, one half of the coils being separated by twine and calico; there were three lengths of wire, each about twenty-four feet long, and they could be connected as one length, or used as separate lengths. By trials with a trough each was insulated from the other. Will call this side of the ring A. On the other side, but separated by an interval, was wound wire in two pieces, together amounting to about sixty feet in length, the direction being as with the former coils. This side call B.* [2]

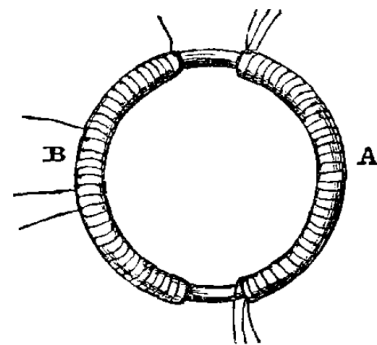


Figura 2: Il primo esperimento di Faraday sull'induzione elettromagnetica [2].

Faraday collegò la parte A ad una batteria e fece in modo che la parte B fosse un'unica bobina collegando poi i suoi estremi ad un filo che portava nelle vicinanze di un ago magnetico distante tre piedi dall'anello (circa 90 cm). Far passare il filo vicino all'ago magnetico era un modo semplice ma efficace per rilevare la presenza di corrente elettrica nella bobina B (essenzialmente un rudimentale galvanometro). Faraday osservò che quando collegava il circuito A alla batteria l'ago magnetico oscillava immediatamente per poi

<sup>1</sup>Nato il 17 dicembre 1797 ad Albany, New York, U.S.A., morto il 13 maggio 1878 (all'età di 80 anni) a Washington D.C., U.S.A.

stabilizzarsi nella posizione in cui si trovava prima del collegamento. Allo stesso modo, quando scollegava la batteria dal circuito A, l'ago magnetico oscillava immediatamente per poi fermarsi nella posizione originaria: *Charged a battery of ten pairs of plates four inches square. Made the coil on B side one coil, and connected its extremities by a copper wire passing to a distance, and just over a magnetic needle (three feet from wire ring), then connected the ends of one of the pieces on A side with battery: immediately a sensible effect on needle. It oscillated and settled at last in original position. On breaking connection of A side with battery, again a disturbance of the needle.* [2]

Faraday aveva scoperto che variazioni repentine del campo magnetico provocavano delle correnti non nulle soltanto per la durata della variazione. Proseguendo nei suoi esperimenti, in pochi mesi egli trovò manifestazioni simili dello stesso fenomeno, per esempio muovendo un magnete dentro e fuori da un solenoide, come riportato in figura 3.

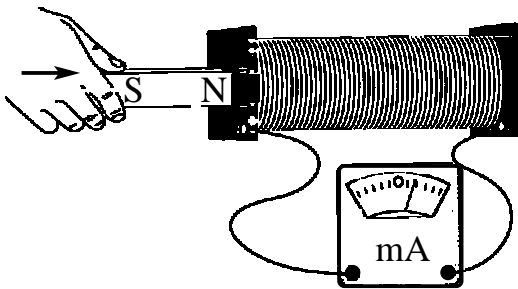


Figura 3: Induzione elettromagnetica generata dal moto di un magnete dentro e fuori da un solenoide. La generazione di corrente indotta è visualizzata dal galvanometro (che misura correnti dell'ordine del mA): se il magnete entra nella bobina l'ago si sposta in un verso, se il magnete è fermo l'ago torna sullo zero (nessuna corrente), se il magnete viene estratto dalla bobina l'ago si muove in verso opposto al caso precedente.

Il 17 ottobre 1831 (solo un mese e mezzo dopo l'inizio dei suoi esperimenti) egli scriveva: *A cylindrical bar magnet three-quarters of an inch in diameter, and eight inches and a half in length, had one end just inserted into the end of the helix cylinder (220 feet long); then it was quickly thrust in the whole length, and the galvanometer needle moved; then pulled out, and again the needle moved, but in the opposite direction. This effect was repeated every time the magnet was put in or out, and therefore a wave of electricity was so produced from mere approximation of a magnet, and not from its formation in situ.* [2] Da notare che Faraday chiamò *wave of electricity* ciò che noi oggi chiamiamo *induzione elettromagnetica*.

In pratica, quando il flusso del campo magnetico attraverso la superficie di una spira cambia nel tempo si osserva una corrente *indotta* nella spira che circola in modo da opporsi alla variazione di flusso del campo magnetico che l'ha generata. Il segno della corrente cambia a seconda se si avvicina il magnete alla spira o se si allontana. Questo fatto del segno fu formalizzato da Lenz<sup>2</sup> nel 1834, tuttavia fu solo nel 1845 che Neumann<sup>3</sup> formulò le scoperte di Faraday

<sup>2</sup>Heinrich Friedrich Emil Lenz, nato il 12 febbraio 1804 a Dorpat, Impero Russo, morto il 10 febbraio 1865 (all'età di 60) a Roma, Stato Pontificio.

<sup>3</sup>Franz Ernst Neumann, nato l'11 settembre 1798 a Joachimsthal, Impero Tedesco, morto il 23 maggio 1895 (all'età di 96 anni) a Königsberg, Impero Tedesco.

in modo matematico e rigoroso, ricavando così la *Legge di Faraday-Neumann*.

## 2 Una dimostrazione convincente

Nei libri per la scuola superiore si trovano varie dimostrazioni della legge di Faraday-Neumann, tuttavia l'origine del segno ‘-’ che compare in essa non è quasi mai giustificata correttamente. Nel seguito ci proponiamo di dimostrare la legge in modo rigoroso.

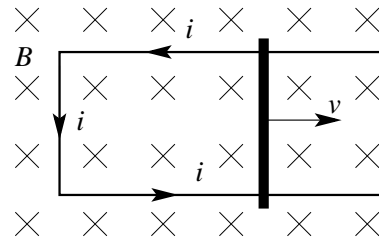


Figura 4: Guida conduttrice ad U con barretta metallica conduttrice che si sposta verso destra a velocità costante di modulo  $v$  in un campo magnetico entrante nel foglio di intensità pari a  $B$ .

Consideriamo una guida conduttrice avente forma ad U, come mostrato in figura 4 ed una barretta metallica in contatto con essa immerse in un campo magnetico entrante nel foglio. La guida è un semplice filo *svestito*, ossia privo di copertura isolante, piegato in modo da dargli la forma di un rettangolo aperto con i due lati paralleli tra loro posti ad una distanza  $\ell$ . Ipotizziamo che la barretta sia trascinata a velocità costante  $v$  verso destra in modo che nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  percorra uno spazio  $\Delta x = v\Delta t$ . Quando la barretta si muove a velocità costante verso destra, anche le cariche presenti sulla barretta si muovono con velocità  $v$  verso destra e, a causa della forza di Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B},$$

le cariche positive subiscono una forza verso l'alto (il campo magnetico è entrante nel foglio), mentre quelle negative verso il basso. Siccome le uniche cariche libere di muoversi sono gli elettroni, essi si spostano in modo ordinato verso il basso e quando arrivano in contatto con la guida ad U si muovono in essa in verso orario. In pratica si ingenera una corrente in verso *anti-orario* (il verso della corrente è opposto a quello del moto degli elettroni) nella spira formata dalla barretta e dalla parte di guida ad U chiusa su di essa. Questa corrente è proprio quella osservata da Faraday nei suoi esperimenti e prende il nome di *corrente indotta*.

Dal punto di vista energetico, la corrente indotta è stata ottenuta gratis? Ovviamente no, in quanto per manetene la barretta in moto a velocità costante occorre assicurare che la somma delle forze agenti su di essa sia nulla. Siccome la barretta è un filo rettilineo percorso da corrente che si muove in un campo magnetico, essa subisce una forza

$$\vec{F} = \ell \vec{i} \times \vec{B}.$$

Fatti i doverosi conti, si scopre che questa forza è diretta verso sinistra, pertanto per mantenere la barretta in moto a

velocità costante è necessario applicare dall'esterno una forza di pari intensità ma in direzione opposta (ossia da sinistra verso destra, nella stessa direzione di  $\vec{v}$ ). La forza applicata dall'esterno compie lavoro positivo in quanto causa uno spostamento della barretta nella stessa direzione di applicazione della forza, di conseguenza viene imposta dall'esterno una *potenza meccanica* pari a

$$P_M = \frac{F \Delta x}{\Delta t} = \frac{liBv\Delta t}{\Delta t} = Bilv.$$

Questa potenza meccanica viene convertita in potenza elettrica che mette in moto gli elettroni in modo da generare una corrente indotta nella spira. Pertanto, si può pensare ad un ipotetico *generatore ideale*, nascosto lungo la spira, che mantiene ai suoi estremi una forza elettromotrice  $\mathcal{E}$  costante, indipendentemente dalla corrente  $i$  che lo attraversa, e che genera una potenza elettrica pari a

$$P_E = \mathcal{E}i.$$

Chiaramente questa potenza elettrica non è altro che la conversione della potenza meccanica (a meno di dissipazioni dovute ad attriti della barretta sulla guida), pertanto possiamo uguagliare questa potenza elettrica  $P_E = \mathcal{E}i$  con la potenza meccanica  $P_M = Bilv$  ottenendo

$$P_M = P_E \iff Bilv = \mathcal{E}i \implies \mathcal{E} = Blv.$$

Questa espressione della *forza elettromotrice indotta* può essere messa in relazione alla *variazione di flusso del campo magnetico* attraverso la superficie della spira formata dalla barretta e dalla guida ad U. Come noto, il flusso del campo magnetico attraverso una superficie si calcola suddividendo la superficie in  $N$  piccoli tasselli, così piccoli da essere considerati piani, in modo che

$$\Phi(B) = \sum_{i=1}^N \vec{B}_i \cdot \Delta \vec{A}_i,$$

dove  $\vec{B}_i$  è il vettore campo magnetico nel centro dell' $i$ -esimo tassello,  $\cdot$  denota il prodotto scalare tra due vettori, ed il vettore  $\Delta \vec{A}_i$  è il *vettore superficie* che caratterizza il tassello  $i$ -esimo, ossia il vettore avente direzione perpendicolare alla superficie infinitesima  $\Delta A_i$ , verso *uscente* dalla superficie ed intensità pari a  $\Delta A_i$  (quindi si misura in  $m^2$ ). Questa è detta anche *convenzione della normale uscente*. Tale convenzione, tuttavia, perde di significato se il flusso è calcolato attraverso una superficie *esattamente piana* (come nel caso di figura 4) in quanto, non essendo chiusa, la superficie non ha un *interno* ed un *esterno*, e la normale uscente non è chiaro quale sia. Come si sceglie il vettore normale in questo caso?

La convezione che risolve il problema è quella della mano destra: basta orientare le quattro dita della mano destra nella stessa direzione della corrente nella spira ed automaticamente il pollice punta nella direzione del vettore superficie  $\vec{A}$  (si osservi che la convenzione è la stessa utilizzata per l'area della spira nel calcolo del momento magnetico). Tornando al caso della figura 4, siccome la corrente nella spira circola in verso *antiorario*, allora il vettore area  $\vec{A}$  è *uscente*

dal foglio ed il flusso  $\Phi(B) = \vec{B} \cdot \vec{A} = -BA < 0$  in quanto i vettori  $\vec{B}$  e  $\vec{A}$  sono *anti-paralleli* ( $B$  e  $A$  sono numeri *positivi* essendo moduli di vettori). Con questa convenzione, calcoliamo la variazione di flusso di campo magnetico attraverso la superficie della spira nell'intervallo di tempo  $\Delta t$ , durante il quale la barretta compie uno spostamento  $\Delta x = v\Delta t$ .

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(B) &= \Phi_f(B) - \Phi_i(B) \\ &= -BA_f - (-BA_i) \\ &= -B(A_f - A_i) \\ &= -Bl\Delta x \\ &= -Blv\Delta t, \end{aligned}$$

pertanto

$$\frac{\Delta\Phi(B)}{\Delta t} = -Blv \implies Blv = -\frac{\Delta\Phi(B)}{\Delta t}.$$

Siccome  $\mathcal{E} = Blv$ , in definitiva si ha

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi(B)}{\Delta t},$$

nota come *Legge di Faraday-Neumann*. Il segno  $-$ , passa sotto il nome di *Legge di Lenz*, che a parole viene spesso enunciata così: *“la corrente indotta in una spira a seguito della variazione di flusso del campo magnetico attraverso l'area della spira ha verso tale da generare un campo magnetico indotto il cui flusso si oppone alla variazione di flusso che ha causato la corrente indotta”*.

### 3 Una osservazione importante

Se la velocità della barretta fosse stata da destra verso sinistra allora il verso della corrente nella spira sarebbe stato *orario* e la convezione della mano destra avrebbe imposto che il vettore  $\vec{A}$  fosse *entrante* nel foglio. Di conseguenza  $\Phi(B) = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA > 0$  (i vettori  $\vec{B}$  e  $\vec{A}$  sono paralleli) e  $\Delta\Phi(B) = B\Delta A = B(A_f - A_i) = -Blv\Delta t < 0$  essendo  $A_f < A_i$ . Molti testi seguono questa via omettendo completamente ogni ragionamento sul segno del flusso. Altri testi prendono la variazione di flusso *sempre e comunque positiva* ( $\Delta\Phi(B) = +Blv\Delta t$ ) e poi introducono il segno  $-$  appellandosi alla legge di Lenz. In ogni caso si possono leggere svariate arrampicate sugli specchi finalizzate a ristabilire il segno  $-$ .<sup>4</sup>

Riteniamo che evidenziare la *convenzione destrorsa*, ben nota agli studenti, sia l'approccio più chiaro e rigoroso in quanto porta *sempre* a

$$\Delta\Phi(B) = -Blv\Delta t < 0,$$

indipendentemente dal verso in cui si muove la barretta.

### Riferimenti bibliografici

- [1] Bence Jones. *The life and letters of Faraday*, volume 1. Longmans Green and Co., London, 1870. [PDF link](#).
- [2] Bence Jones. *The life and letters of Faraday*, volume 2. Longmans Green and Co., London, 1870. [PDF link](#).

<sup>4</sup>Allo studente diligente ed al suo docente altrettanto diligente è lasciato il compito di verificare come i vari testi in adozione nelle scuole dimostrino la legge di Faraday-Neumann.