$$
\begin{aligned}
&\nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \, \partial y} = -U^e(x) \frac{dU^e(x)}{dx}, \\
&\psi(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial \psi(x,0)}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \psi(x,\infty)}{\partial y} = U^e(x), \qquad x > 0, \\
&\psi(0,y) = Uy, \qquad y > 0.
\end{aligned}
$$

In questa formulazione il problema dello strato limite rivela la natura matematica delle semplificazioni conseguenti alle ipotesi poste da Prandtl a fondamento della sua teoria: l’equazione della funzione di corrente, che nel caso generale di corrente piana incomprimibile di tipo Navier–Stokes è del quarto ordine, si riduce a un’equazione del terzo ordine. Corrispondentemente sul “contorno orizzontale lontano” $y \to \infty$ la nuova variabile incognita ψ ha una sola condizione al contorno invece di due. Per quanto riguarda le condizioni al contorno sui lati verticali, c’è una sola condizione in conformità con la sparizione di tutte le derivate rispetto a x di ordine superiore al primo.

6.3 Corrente esterna uniforme: profilo di Blasius

Un caso particolarmente importante di strato limite sulla lastra semi-infinita si presenta quando la corrente esterna è uniforme e parallela alla lastra, con velocità U assegnata. In questo caso $u^e(x,y) = U$, per cui anche $U^e(x) = u^e(x,0) = U$. Le equazioni di Prandtl per le componenti della velocità si riducono allora a

$$
\begin{aligned}
&u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,
\end{aligned}
$$

e devono essere risolte con le corrispondenti condizioni al contorno

$$
\begin{aligned}
&u(x,0) = 0 \qquad \text{e} \qquad u(x,\infty) = U, \qquad x > 0, \\
&u(0,y) = U, \qquad y > 0, \\
&v(x,0) = 0, \qquad x > 0.
\end{aligned}
$$

Nel caso di corrente esterna *uniforme* a monte, il valore al contorno di u risulta quindi essere necessariamente discontinuo: infatti per la condizione sulla lastra si ha $u(0,0) = 0$, mentre la condizione sulla semiretta verticale $x = 0$, $y > 0$, implica $u(0,0) = U \neq 0$.

Procediamo alla risoluzione del problema osservando che, data la mancanza di una scala spaziale di riferimento nel problema considerato, si può immaginare che l'andamento del profilo della velocità orizzontale u nello strato limite "non dipenda" dalla coordinata x, nel senso che al variare di x si abbia soltanto un cambiamento della scala di questa variabile. In termini matematici, questo richiede che la dipendenza di u dalle due variabili x e y si verifichi attraverso una variabile singola (di similarità) che scriveremo, senza perdita di generalità, nella forma

$$\eta = \eta(x, y) = \frac{y}{g(x)},$$

dove $g(x)$ è una funzione da determinare. Al posto della incognita $u(x, y)$ introdurremo allora la nuova incognita adimensionale h, funzione della sola variabile η, definita da

$$u(x, y) = Uh(\eta(x, y)) = Uh\bigl(\tfrac{y}{g(x)}\bigr).$$

Se esiste una soluzione $u(x, y)$ di questo tipo, il profilo di velocità ad ogni distanza x dal bordo di attacco sarà semplicemente una versione dilatata (o compressa) della velocità a qualunque altra distanza. Notiamo che questa ricerca di una soluzione similare è un po' più generale di quelle del capitolo 5 in quanto non stiamo tentando di immaginare in anticipo una forma determinata della funzione $g(x)$ ma lasciamo che essa emerga in modo naturale nel corso del procedimento di calcolo.

Analizziamo inizialmente che cosa comporta la condizione di incoprimibilità per la struttura della seconda variabile incognita $v(x, y)$ del problema originario. Il vincolo di incomprimibilità permette di scrivere:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\Bigl[Uh\bigl(\tfrac{y}{g(x)}\bigr)\Bigr] \\
&= -Uh'(\eta)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{y}{g(x)}\right] = -Uh'(\eta)\left[-\frac{g'(x)y}{[g(x)]^2}\right] \\
&= \frac{Ug'(x)}{g(x)}\,\eta h'(\eta).
\end{aligned}$$

Si noti che in questa relazione come in tutte le prossime l'apice indica la derivata rispetto alla variabile indipendente di ogni funzione di una sola variabile, qualunque essa sia. Per trovare la forma esplicita di $v(x, y)$, integriamo[1] questa equazione rispetto a y:

$$v(x, y) = \frac{Ug'(x)}{g(x)} \int_0^y \eta(x, y)\, h'(\eta(x, y))\, dy,$$

dove, per determinare la costante di integrazione, si è utilizzata la condizione al contorno di non penetrazione sulla lastra, $v(x, 0) = 0$, per ogni $x > 0$. Il cambiamento di variabile $y = g(x)\,\eta$ implica $dy = g(x)\, d\eta$, per cui l'integrale diventa

$$v(x, y) = Ug'(x) \int_0^{\eta(x,y)} \eta h'(\eta)\, d\eta.$$

In base all'identità $[\eta h(\eta)]' = h(\eta) + \eta h'(\eta)$, si ottiene

$$v(x, y) = Ug'(x)\left[\eta h(\eta) - \int_0^{\eta} h(\eta)\, d\eta\right].$$

Se ora indichiamo con $f(\eta)$ una funzione primitiva di $h(\eta)$, ovvero,

$$f(\eta) = \int h(\eta)\, d\eta,$$

per cui $f'(\eta) = h(\eta)$, la rappresentazione delle componenti della velocità della soluzione similare sarà

$$u(x, y) = Uf'(\eta),$$
$$v(x, y) = Ug'(x)\big[\eta f'(\eta) - f(\eta)\big],$$

dove, naturalmente, $\eta = \eta(x, y)$. Siccome dobbiamo risolvere l'equazione di Prandtl

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

[1] L'uso dello stesso simbolo y sia come variabile di integrazione sia come estremo dell'integrale non dovrebbe provocare confusione.

è necessario determinare le tre derivate che compaiono in essa. Abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\big[U f'(\eta)\big] = U f''(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial x}\\ &= U f''(\eta)\left\{-\frac{g'(x)y}{[g(x)]^2}\right\} = -\frac{Ug'(x)}{g(x)}\,\eta f''(\eta).\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\big[U f'(\eta)\big] = U f''(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{U}{g(x)}\, f''(\eta),\\ \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{U}{g(x)}\, f''(\eta)\right] = \frac{U}{g(x)}\, f'''(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{U}{[g(x)]^2}\, f'''(\eta),\end{aligned}$$

dove si intende sempre $\eta = \eta(x,y)$. Sostituendo le espressioni di u e v e di tutte le derivate di u nell'equazione di Prandtl si ottiene,

$$-\nu\,\frac{U}{g^2}\, f''' + U f'\left[-\frac{Ug'}{g}\,\eta f''\right] + Ug'\big[\eta f' - f\big]\frac{U}{g}\, f'' = 0,$$

dove abbiamo scritto g e g' al posto di $g(x)$ e $g'(x)$ poiché anche la funzione $g(x)$ non è nota e quindi rappresenta una ulteriore incognita del problema. Semplificando l'equazione si ottiene

$$\nu\,\frac{U}{g^2}\, f''' + \frac{U^2 g'}{g}\, f f'' = 0,$$

ovverosia, dopo aver diviso per $\nu U/g^2$,

$$f''' + \frac{Ugg'}{\nu}\, f f'' = 0.$$

Ricerca della variabile di similarità

Affinché questa equazione possa diventare un'equazione differenziale ordinaria è necessario che il coefficiente contenente la funzione $g(x)$ sia costante. In altre parole la funzione $g(x)$ che permette di determinare una soluzione similare del problema risulta essere determinata come soluzione dell'equazione

$$\frac{Ugg'}{\nu} = \frac{1}{2},$$

dove si è scelta uguale a $\frac{1}{2}$ la costante senza alcuna perdita di generalità, per convenienza successiva. Pertanto la funzione $g(x)$ è definita come soluzione della semplice equazione differenziale ordinaria del primo ordine

$$gg' = \frac{\nu}{2U} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dx}g^2 = \frac{\nu}{2U},$$

che integrata fornisce immediatamente

$$[g(x)]^2 = K + \frac{\nu x}{U},$$

dove K è la costante d'integrazione. Il valore della costante è scelto in modo da localizzare la singolarità della soluzione in $x = 0$. Scegliamo infatti come condizione "iniziale" $g(x) = 0$, così che il cambiamento di scala indotto dal cambiamento di variabile $\eta = y/g(x)$ diventi degenere per $x = 0$. Con questa scelta, si ha $K = 0$ e quindi

$$g(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}.$$

La variabile similare η è allora definita da

$$\eta(x, y) = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}} = \frac{y}{x}\sqrt{\frac{Ux}{\nu}} = \frac{y}{x}\sqrt{\mathrm{Re}_x}\,,$$

dove $\mathrm{Re}_x = Ux/\nu$. La presenza del fattore $\sqrt{x}$ nel denominatore della definizione di η significa che la dilatazione della scala dell'asse y per un dato x è proporzionale a $1/\sqrt{x}$. In altri termini l'intervallo dei valori di y in cui la soluzione varia in modo apprezzabile cresce proporzionalmente con $\sqrt{x}$ e di conseguenza la regione in cui si estende lo strato limite ha un forma parabolica, con l'asse della parabola coincidente con l'asse x, come mostrato nella figura 6.1.

Ad esempio, se $\eta_\star$ è il punto che corrisponde a un valore della velocità uguale al 95 per cento della velocità U, cioè al valore $u = 0.95\,U$, allora lo spessore $\delta_{0.95}(x)$ dello strato limite definito da questo valore sarà dato dalla relazione

$$\frac{\delta_{95\%}(x)}{x} = \eta_\star\sqrt{\frac{\nu}{Ux}} = \frac{\eta_\star}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}},$$

ovverosia

$$\delta_{95\%}(x) = \eta_\star\sqrt{\frac{\nu x}{U}}.$$

Equazione di Blasius

L'equazione similare ricercata per la corrente attorno alla lastra piana semi-infinita in una corrente esterna parallela al suo piano risulta essere:

$$f''' + \tfrac{1}{2} f f'' = 0,$$

e si chiama **equazione di Blasius**. Le condizioni al contorno per f che completano l'equazione sono ottenute da quelle per u. Siccome $u(x, y) = Uh(\eta) = Uf'(\eta)$, le due condizioni $u(x, 0) = 0$ e $u(x, \infty) = U$ diventano rispettivamente $f'(0) = 0$ e $f'(\infty) = 1$. Inoltre, siccome $v = Ug'(x)[\eta f'(\eta) - f(\eta)]$, la condizione $v(x, 0) = 0$ diventa $f(0) = 0$. Notiamo che la condizione della corrente a monte, $u(0, y) = U$, è soddisfatta in virtù di $f'(\infty) = 1$ poiché per $x \to 0$ si ha $\eta \to \infty$.

Pertanto, la corrente similare attorno alla lastra semi-infinita investita da una corrente parallela al suo piano si ottiene risolvendo il problema

$$\begin{aligned} & f''' + \tfrac{1}{2} f f'' = 0, \\ & f(0) = 0, \qquad f'(0) = 0, \qquad f'(\infty) = 1. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi un'equazione differenziale ordinaria del terzo ordine con tre condizioni al contorno di cui due corrispondono alla superficie della lastra e una a grande distanza da essa.

Soluzione del campo di moto

Una volta determinata la soluzione $f(\eta)$ e $f'(\eta) = u(\eta)$ dell'equazione di Blasius, il campo di velocità della corrente attorno alla lastra può essere calcolato sfruttando la relazione del cambiamento di variabile indipendente. È immediato ricavare che le componenti cartesiane della velocità sono date dalle due relazioni:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= Uf'(\eta(x, y)) = Uf'\Big(y\sqrt{\tfrac{U}{\nu x}}\Big), \\ v(x, y) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{U\nu}{x}}\big[\eta f'(\eta) - f(\eta)\big] \\ &= \frac{U}{2}\left[\frac{y}{x} f'\Big(y\sqrt{\tfrac{U}{\nu x}}\Big) - \sqrt{\tfrac{\nu}{Ux}}\, f\Big(y\sqrt{\tfrac{U}{\nu x}}\Big)\right]. \end{aligned}$$

Esempio 1 **Problema di Blasius formulato come sistema del primo ordine**

Il problema differenziale ordinario associato all'equazione di Blasius può essere risolto in modo numerico mediante un metodo che si basa sulla riduzione dell'ordine dell'equazione differenziale.

Introducendo le incognite *ausiliarie* $u = f'$ e $\zeta = u' = f''$, l'equazione di Blasius può essere riscritta come un sistema di *tre* equazioni del primo ordine accoppiate fra loro. Risulta infatti

$$\zeta' + \tfrac{1}{2} f \zeta = 0,$$
$$u' = \zeta,$$
$$f' = u,$$

Le condizioni al contorno per ψ possono essere scritte come tre condizioni per u e f:

$$f(0) = 0, \qquad u(0) = 0, \qquad u(\infty) = 1.$$

Scrivendo le condizioni di fianco all'equazione della variabile corrispondente, il problema completo assume la seguente forma

$$\begin{aligned} &\zeta' = -\tfrac{1}{2} f \zeta, && \\ &u' = \zeta, && u(0) = 0 \quad \text{e} \quad u(\infty) = 1, \\ &f' = u, && f(0) = 0. \end{aligned}$$

Notiamo che la seconda variabile ausiliaria (u) è soggetta a due condizioni al contorno mentre non esiste alcuna condizione al contorno per la prima variabile (ζ). In realtà, le due condizioni per u implicano una ben definita condizione per ζ in quanto, in virtù del teorema fondamentale del calcolo differenziale, si ha

$$\int_0^\infty \frac{du(\eta)}{d\eta}\, d\eta = u(\infty) - u(0) = 1 - 0 = 1,$$

e quindi la variabile ζ è soggetta alla seguente condizione *integrale*

$$\int_0^\infty \zeta(\eta)\, d\eta = 1.$$

Ne consegue che il problema completo, formulato come sistema del primo ordine, potrà essere scritto anche come

$$
\begin{aligned}
&\zeta' = -\tfrac{1}{2} f\zeta, && \textstyle\int_0^\infty \zeta(\eta)\, d\eta = 1,\\
&u' = \zeta, && u(0) = 0 \quad \text{o} \quad u(\infty) = 1,\\
&f' = u, && f(0) = 0.
\end{aligned}
$$

Se si impone la condizione integrale su ζ, si può scegliere di imporre liberamente una delle due condizioni disponibili per u: la condizione tralasciata risulterà comunque soddisfatta in modo esatto in virtù dell'avere imposto l'altra assieme a quella integrale sulla prima componente incognita ζ.

Esempio 2 **Soluzione numerica del problema di Blasius**

Il sistema del primo ordine con le condizioni agli estremi dell'intervallo di integrazione e/o condizioni di tipo integrale è un sistema non lineare di tre equazioni differenziali accoppiate e deve pertanto essere risolto mediante un metodo numerico. Introducendo una incognita $\mathbf{y}$ vettoriale e una funzione $\mathbf{F}(\mathbf{y})$, non lineare e a valori vettoriali,

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta \\ u \\ f \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{F}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{y}) \\ F_2(\mathbf{y}) \\ F_3(\mathbf{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} f\,\zeta \\ \zeta \\ u \end{pmatrix},$$

il problema può essere riscritto in forma compatta come

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\eta} = \mathbf{F}(\mathbf{y}),$$

dove si sottintende la presenza delle tre relazioni algebriche che rappresentano le condizioni al contorno del sistema.

Per potere discretizzare l'equazione, l'intervallo di integrazione semi-infinito $(0, \infty)$ deve essere troncato. Supponiamo che nel nostro problema per un intervallo sufficientemente grande l'errore causato dall'imporre a una distanza finita la condizione al contorno per $\eta \to \infty$ sia trascurabile. La discretizzazione produrrà un sistema di equazioni algebriche non lineari per la cui risoluzione si potrà impiegare un metodo iterativo, ad esempio il metodo di Newton. La formulazione di questo metodo nel caso considerato richiederà di calcolare la matrice jacobiana:

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} = \left(\frac{\partial F_i(\mathbf{y})}{\partial y_j} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} f & 0 & -\frac{1}{2}\zeta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La soluzione mostrata nella figura 6.2 è stata calcolata per mezzo di un metodo numerico che rispetta in modo esatto, a livello del problema discretizzato, il teorema fondamentale del calcolo differenziale.

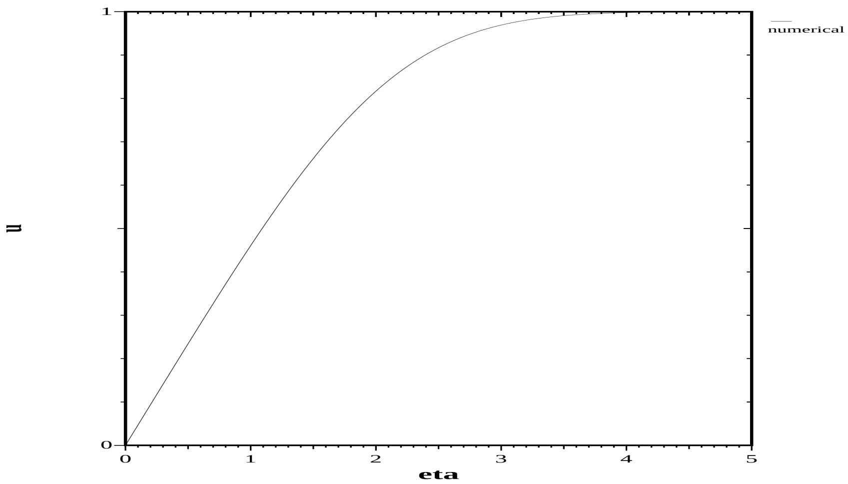

Figura 6.2 Profilo di velocità della soluzione dell'equazione di Blasius