STUDIO di FUNZIONE

(Richiami fondamentali da sapere ***ad maturitatem superandam***!)

Lo ***studio di funzione*** è finalizzato al ***disegno*** del grafico della funzione in esame tramite l'***analisi matematica*** e i suoi strumenti tipici. In generale non si richiede il grafico esatto, ma la determinazione di alcuni punti significativi, necessari per la descrizione dell'andamento della funzione nell'intervallo in cui viene studiata.

Lo studio di funzione viene condotto per ***passi successivi***, ognuno dei quali è un'ulteriore conferma dei risultati ottenuti ai passi precedenti: è quindi ***facile accorgersi se si stanno commettendo errori*** e in generale basta una ricontrollata veloce per scovarli. Tuttavia, prima di buttarsi a capofitto nello schema predefinito, è opportuno ***guardare sempre bene in faccia*** l'oggetto del proprio studio poiché sotto un brutta apparenza, spesso si nasconde una funzione abbastanza semplice (soprattutto all'esame di maturità). È altrettanto importante ***farsi un'idea***, se pur grossolana, di come sarà il grafico: in generale questo è possibile conoscendo l'andamento delle funzioni elementari.

Lo schema generale da seguire per lo studio di funzione è il seguente:

1. Tipo di funzione e Campo di Esistenza

Le funzioni si distinguono in:

- *algebriche*
  - *razionali intere*
  - *razionali fratte*
  - *irrazionali intere e fratte*
- *trascendenti*
  - *goniometriche*
  - *logaritmiche*
  - *esponenziali*
  - *miste (formate da funzioni di vario tipo)*

ESEMPI:

$f(x) = x^2(x^3 - 3x)$ funzione razionale intera

$f(x) = \dfrac{x^2(x^3 - 3x)}{4x - 3}$ funzione razionale fratta

$f(x) = \sqrt[5]{x^2(x^3 - 3x)}$ funzione irrazionale intera

$f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2(x^3 - 3x)}{4x - 3}}$ funzione irrazionale fratta

$f(x) = tg(x^2(x^3 - 3x))$ funzione goniometrica

$f(x) = log(x^2(x^3 - 3x))$ funzione logaritmica

$f(x) = e^{x^2(x^3-3x)}$ funzione esponenziale

$f(x) = x^2(x^3 - 3x) \cdot e^{x^2(x^3-3x)}$ funzione mista

Il campo di esistenza è facilmente determinabile, una volta capito di che tipo di funzione si tratta. In generale il campo di esistenza è tutto R, ossia l'insieme dei numeri reali; tuttavia certe funzioni soffrono di alcune limitazioni:

TIPO di FUNZIONE	**LIMITAZIONE sul CAMPO DI ESISTENZA**
$f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$	$D(x) \neq 0$
$f(x) = \sqrt[2n]{g(x)}$	$g(x) \geq 0$
$f(x) = log[g(x)]$	$g(x) > 0$
$f(x) = tg[g(x)]$	$g(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
$f(x) = cotg[g(x)]$	$g(x) \neq k\pi$
$f(x) = arcsin[g(x)]$	$-1 \leq g(x) \leq 1$
$f(x) = arccos[g(x)]$	$-1 \leq g(x) \leq 1$

Il ***campo di esistenza*** della funzione è ***l'intersezione di tutte le limitazioni*** sopra riportate e presenti nell'espressione della funzione stessa: per ottenerlo basta fare il ***sistema fra tutte le condizioni di esistenza delle singole funzioni*** dalle quali è composta la funzione in esame.

ESEMPI:

$$f(x) = \frac{log(x^3 - 1) + \sqrt{x+1}}{x-4} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^3 - 1 > 0 \\ x + 1 \geq 0 \\ x - 4 \neq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x > 1 \\ x \geq -1 \\ x \neq 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 1 < x < 4 \,;\; x > 4$$

$$f(x) = log[sin(x)] \quad \Rightarrow \quad sin(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$$

2. Simmetrie e/o Periodicità

Una funzione f con dominio A si dice ***pari*** (simmetria rispetto all'asse y) se:

$$f(-x)=f(x) \qquad \forall x\in A$$

Una funzione f con dominio A si dice ***dispari*** (simmetria rispetto all'origine) se:

$$f(-x)=-f(x) \qquad \forall x\in A$$

Una funzione f con dominio A si dice ***periodica*** di periodo $\boldsymbol{T}$ se:

$$\exists T\in R \qquad \text{t.c.} \qquad f(x)=f(x+T) \qquad \forall x\in A$$

dalla definizione di periodicità discende che una funzione in cui compaiono funzioni trigonometriche elementari ha periodo pari al ***minimo comune multiplo*** dei periodi delle funzioni semplici presenti.

La ***simmetria*** viene sfruttata studiando la funzione solo per $x>0$ anziché su tutto il dominio in quanto è poi possibile ricostruire l'andamento globale grazie alla simmetria stessa (simmetria rispetto all'asse y se la funzione è pari; simmetria rispetto all'origine se la funzione è dispari).

La ***periodicità*** viene sfruttata studiando la funzione in un sottodominio qualsiasi (il più comodo) di ampiezza T.

ESEMPI:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}$$
$$f(-x)=\sqrt{(-x)^2+1}=\sqrt{x^2+1}=f(x)$$ per cui la funzione è pari

$$f(x)=\sqrt{x^2+3x+3}-\sqrt{x^2-3x+3}$$
$$f(-x)=\sqrt{(-x)^2+3(-x)+3}-\sqrt{(-x)^2-3(-x)+3}=\sqrt{x^2-3x+3}-\sqrt{x^2 3x+3}=$$
$$-\left(\sqrt{x^2+3x+3}-\sqrt{x^2-3x+3}\right)=-f(x)$$ per cui la funzione è dispari

$$f(x) = \log\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$$

$$f(-x) = \log\left(\sqrt{(-x)^2+1} + x\right) = \log\left(\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}-x}\right) =$$

$$\log\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\right) = \log\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^{-1} = -\log\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = -f(x)$$

per cui la funzione è dispari

$$f(x) = \sin(3x)$$

$$f(-x) = \sin(-3x) = -\sin(3x) = -f(x)$$

per cui la funzione è dispari

inoltre, essendo la funzione $\sin$ di periodo 2π, il periodo di f è dato da:

$$\sin(3(x+T)) = \sin(3x+2\pi) \quad \Rightarrow \quad 3\cdot T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2}{3}\pi$$

$$f(x) = tg\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$f(-x) = tg\left(-\frac{x}{2}\right) = -tg\left(\frac{x}{2}\right) = -f(x)$$

per cui la funzione è dispari

inoltre, essendo la funzione tg di periodo π, il periodo di f è dato da:

$$tg\left(\frac{1}{2}(x+T)\right) = tg\left(\frac{1}{2}x+\pi\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\cdot T = \pi \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi$$

3. Intersezioni con gli assi

Le intersezioni con gli assi sono i punti le cui coordinate risultano dall'unione dei due sistemi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = f(0) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = x_0 \\ y = f(x_0) = 0 \end{cases}$$

mentre il primo è di immediata soluzione, per il secondo, nel caso in cui con le comuni regole valide per la risoluzione di equazioni non si riesca a risolvere, può essere necessario ***procedere graficamente*** $f(x_0) = g(x_0) - h(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(x_0) = h(x_0)$: <u>nel caso ammetta soluzione</u> difficilmente si troverà $x_0 = \alpha$ ma più genericamente $x_0 = \alpha \approx \ldots$. In ogni caso è sempre meglio ***controllare che le radici*** x_0 ***appartengano al dominio della funzione***, perché il procedimento di calcolo potrebbe aver introdotto soluzioni estranee.

4. Studio del segno

Con questa operazione si determinano gli intervalli in cui $f(x)$ è positiva o negativa risolvendo una disequazione del tipo $f(x) > 0$. A tale proposito si vedano i ***richiami sulle disequazioni*** in cui vengono trattati in modo sistematico la quasi totalità delle disequazioni, anche quelle che richiedono la ***soluzione grafica***. A questo punto dello studio, è possibile cancellare dal foglio le regioni di piano in cui sicuramente non ci sarà la funzione.

5. Limiti ed Asintoti

I ***limiti*** della funzione vanno calcolati per tutti i punti che sono estremi del dominio, al finito o all'infinito: ***punti di frontiera***. È conveniente a questo proposito riportare il campo di esistenza della funzione su un asse orizzontale, segnando con un'ondina gli intervalli che definiscono il dominio, e con un pallino vuoto gli eventuali punti in cui la funzione non è definita: in questo modo non ci saranno dubbi riguardo a "dove" calcolare i limiti.
Per il calcolo dei limiti si vedano i ***richiami sui limiti***.

ESEMPI:

$C.E.:\ \ 1 < x < 4\,;\ x > 4 \qquad \Rightarrow$

Si dovranno calcolare i limiti per:

$x \to 1^+\,;\ x \to 4^-\,;\ x \to 4^+\,;\ x \to +\infty$

Gli ***asintoti*** di una funzione sono delle *rette* (verticali, orizzontali od oblique) *alle quali la funzione tende ad "adagiarsi" all'infinito*: infatti la distanza tra la f e l'asintoto tende a zero agli estremi del piano.

ASINTOTI VERTICALI

Se risulta

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

allora la retta di equazione $x = x_0$ è un ***asintoto verticale***. È questo il caso classico di punti in cui si annulla l'eventuale denominatore di f.

ASINTOTI ORIZZONTALI

Se risulta

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = d$$

allora la retta di equazione $y = d$ è l'***asintoto orizzontale destro***.

Se risulta

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = s$$

allora la retta di equazione $y = s$ è l'***asintoto orizzontale sinistro***.

Se risulta

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

allora la retta di equazione $y = b$ è l'***asintoto orizzontale***.

ASINTOTI OBLIQUI

In assenza di asintoto orizzontale, si cerca l'eventuale asintoto obliquo: si possono verificare più casi.

Se ***esistono e sono finiti*** entrambi i limiti

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m_d \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - m_d x\right) = q_d \end{cases}$$

allora la retta di equazione $y = m_d x + q_d$ (con $m_d \neq 0$) è l'***asintoto obliquo destro***.

Se ***esistono e sono finiti*** entrambi i limiti

$$\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m_s \\ \\ \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - m_s x\right) = q_s \end{cases}$$

allora la retta di equazione $y = m_s x + q_s$ (con $m_s \neq 0$) è l'***asintoto obliquo sinistro***.

Se ***esistono e sono finiti*** i limiti

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \\ \\ \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - mx\right) = q \end{cases}$$

allora la retta di equazione $y = mx + q$ (con $m \neq 0$) è l'***asintoto obliquo***.

ESEMPI:

$\lim_{x\to1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty \quad \Rightarrow \quad x = 1$ asintoto verticale

$\lim_{x\to1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty \quad \Rightarrow \quad x = 1$ asintoto verticale

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+3x+1}{\left|2x^3-1\right|} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{1}{2}$ asintoto orizzontale destro

$\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+3x+1}{\left|2x^3-1\right|} = -\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y = -\dfrac{1}{2}$ asintoto orizzontale sinistro

$f(x) = \dfrac{x^4+3x+1}{\left|2x^2-1\right|} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^4+3x+1}{x\cdot\left|2x^2-1\right|}$

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^4+3x+1}{x\cdot\left|2x^2-1\right|} = +\infty \quad \Rightarrow$ non può esistere l'asintoto obliquo

$f(x)=\frac{x^3-x}{x^2-4}$; $\frac{f(x)}{x}=\frac{x^3-x}{x\cdot(x^2-4)}$ $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x}{x\cdot(x^2-4)}=1=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-x}{x\cdot(x^2-4)}$

$f(x)-x=\frac{x^3-x-x^3+4x}{x^2-4}=\frac{3x}{x^2-4}$ $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x^2-4}=0=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x^2-4}$

$y=x$ $\Rightarrow$ asintoto obliquo

6. Derivata Prima

Lo studio della derivata prima ha come scopo l'individuazione degli intervalli di ***crescenza o decrescenza*** della funzione e dei suoi ***estremi relativi***. La ***prima cosa*** da fare dopo il calcolo della derivata prima è la ***determinazione del suo dominio***: infatti i punti che appartengono al dominio di *f*, ma che sono esclusi dal dominio della derivata prima, sono ***punti di non derivabilità*** in quanto la *f'* non è ivi definita (non essendo punti del suo dominio), pertanto ***è necessario calcolare i limiti di f' in questi punti***.

ESEMPI:

$f(x)=\sqrt{x}$ $\Rightarrow$ $C.E.:$ $x\geq 0$

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\Rightarrow$ $C.E.:$ $x>0$

quindi il punto $x=0$ è un punto di non derivabilità per *f* in quanto *f'* non è ivi definita.

Dopo il calcolo di *f'* e la determinazione del suo campo di esistenza, si prosegue con la ricerca delle radici (valori di *x* che la annullano) e con lo studio del segno. In generale per $I\subseteq C.E.$ si ha:

$f'(x)>0$ per $x\in I$ $\Rightarrow$ ***funzione crescente*** in I

$f'(x)<0$ per $x\in I$ $\Rightarrow$ ***funzione decrescente*** in I

Sia ora x_0 un punto del dominio tale che $f'(x_0)=0$: se in un intorno I di x_0 si ha

$f'(x)<0$ per $x<x_0; x\in I$

$\Rightarrow$ x_0 è un punto di ***minimo relativo***

$f'(x)>0$ per $x>x_0; x\in I$

$f'(x) > 0$ per $x < x_0; x \in I$

$\Rightarrow$ x_0 è un punto di ***massimo relativo***

$f'(x) < 0$ per $x > x_0; x \in I$

$f'(x) < 0$ per $x < x_0; x \in I$

$\Rightarrow$ x_0 è un punto di ***flesso a tg orizzontale discendente***

$f'(x) < 0$ per $x > x_0; x \in I$

$f'(x) > 0$ per $x < x_0; x \in I$

$\Rightarrow$ x_0 è un punto di ***flesso a tg orizzontale ascendente***

$f'(x) > 0$ per $x > x_0; x \in I$

Nota: ***se $f'(x_0) = 0$, è possibile decidere se x_0 è un punto di massimo o di minimo relativo guardando la prima derivata di ordine superiore non nulla calcolata in x_0: se è <u>pari e positiva</u> x_0 è un punto di minimo, se è <u>pari e negativa</u> x_0 è un punto di massimo:***

Sia f derivabile n volte in x_0 ($n \geq 2$) e tale che $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$; $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} n \text{ pari} \begin{cases} f^{(n)}(x_0) > 0 & \Rightarrow x_0 \text{ è punto di minimo locale} \\ f^{(n)}(x_0) < 0 & \Rightarrow x_0 \text{ è punto di massimo locale} \end{cases} \\ n \text{ dispari} \qquad\qquad \Rightarrow x_0 \text{ non è punto di estrmo} \end{cases}$$

7. Derivata Seconda

Dopo il calcolo di f'', se ne determinano radici e segno; per $I \subseteq C.E.$ si ha:

$f''(x) > 0$ per $x \in I$ $\Rightarrow$ ***funzione convessa*** in I (concavità verso l'alto $\approx x^2$)

$f''(x) < 0$ per $x \in I$ $\Rightarrow$ ***funzione concava*** in I (concavità verso il basso $\approx -x^2$)

Sia ora x_0 un punto del dominio; se in un intorno I di x_0 la ***derivata seconda cambia segno*** da un punto a sinistra di x_0 ad un punto a destra, allora x_0 è un punto di ***flesso*** $\Rightarrow f''(x_0) = 0$.

Nota: $f''(x_0) = 0$ ***non implica necessariamente che x_0 sia un punto di flesso, mentre x_0 punto di flesso $\Rightarrow f''(x_0) = 0$!***