INTEGRALI

(Richiami fondamentali da sapere ***ad maturitatem superandam***!)

"Derivare subhumanum est, integrare superdivinum!"

Come afferma sinteticamente questo adagio, mentre la derivata non richiede particolari abilità intellettuali, essendo una meccanica applicazione di una regoletta ricorsiva, l'integrale esige una chiara conoscenza della possibile casistica, nonché consolidata esperienza. Pertanto è indispensabile applicarsi nell'***esercizio costante***.

1. Integrali *immediati*

Vedere tabelle riportate su tutti i libri e manabili.

2. Integrali *quasi-immediati*

Sono ancora gli integrali immediati in cui al posto della variabile x si trova $f(x)$ e la funzione integranda è moltiplicata per $f'(x)$. Alcuni casi sono riportati di seguito

2.1 $\int sin[f(x)]f'(x)dx = -cos[f(x)] + c$

ESEMPI:

$$\int sin[cos(x)]\cdot sin(x)dx = -\int sin[cos(x)]\cdot[-sin(x)]dx = cos[cos(x)] + c$$

2.2 $\int cos[f(x)]f'(x)dx = sin[f(x)] + c$

ESEMPI:

$$\int \frac{cos\left[\sqrt[3]{x^2}\right]}{\sqrt[3]{x}}dx . = \frac{3}{2}\int cos\left[\sqrt[3]{x^2}\right]\cdot\frac{2}{3}x^{-1/3}\,dx = \frac{3}{2}sin\left[\sqrt[3]{x^2}\right] + c$$

2.3 $\int \frac{f'(x)}{[cos[f(x)]]^2}\,dx = tg[f(x)] + c$

ESEMPI:

$$\int \frac{\sqrt{5}}{x\cdot[cos[log(x)]]^2}\,dx = \sqrt{5}\int \frac{1}{[cos[log(x)]]^2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \sqrt{5}\cdot tg[log(x)] + c$$

2.4 $\int e^{f(x)}\cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + c$

ESEMPI:

$$\int e^{e^{-x}-x}\,dx = \int e^{e^{-x}}\cdot e^{-x}\,dx = -\int e^{e^{-x}}\cdot\left(-e^{-x}\right)dx = e^{e^{-x}} + c$$

2.5 $\int\left[[f(x)]^\alpha\right]\cdot[f'(x)]dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ con $\alpha \neq -1$

ESEMPI:

$$\int [cos(x)]^2\cdot sin(x)dx = -\int [cos(x)]^2\cdot[-sin(x)]dx = -\frac{[cos(x)]^3}{3} + c$$

$$\int \frac{[log(x)]^3}{x}dx = \frac{[log(x)]^4}{4} + c$$

$$\int \frac{x}{\sqrt[7]{\left(2x^2+\sqrt{13}\right)^5}}dx = \frac{1}{4}\int\left(2x^2+\sqrt{13}\right)^{-\frac{5}{7}}\cdot 4x\,dx = \frac{1}{4}\frac{\left(2x^2+\sqrt{13}\right)^{\frac{2}{7}}}{\frac{2}{7}} + c = \frac{7}{8}\sqrt[7]{\left(2x^2+\sqrt{13}\right)^2} + c$$

2.6 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + c$

ESEMPI:

$$\int tg(x)\,dx = \int \frac{sin(x)}{cos(x)}\,dx = -\int \frac{-sin(x)}{cos(x)}\,dx = -log|cos(x)| + c$$

$$\int \frac{tg(x)}{log[cos(x)]}\,dx = -\int \frac{\frac{-sin(x)}{cos(x)}}{log[cos(x)]}\,dx = -log|log[cos(x)]| + c$$

$$\int \frac{e^{2x}\cdot\left(1-e^{-2x}\right)}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{e^{x}\cdot\left(1-e^{-2x}\right)}{e^{-x}\cdot\left(1+e^{2x}\right)}\,dx = \int \frac{e^x-e^{-x}}{e^{-x}+e^x}\,dx = log\left|e^x-e^{-x}\right| + c$$

3. Integrali di *funzioni razionali fratte*

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

Si possono verificare due casi: il grado n di $P(x)$ è maggiore o uguale al grado m di $Q(x)$ o il contrario.

3.1 $n \geq m$: la frazione $\frac{P(x)}{Q(x)}$ è comunque scomponibile nella somma di un polinomio $H(x)$ di grado n-m, facilmente integrabile, e di una frazione $\frac{R(x)}{Q(x)}$ in cui il grado del numeratore è strettamente minore del grado del denominatore: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{Q(x)} + H(x)$.

ESEMPI:

$$\int \frac{x^3+x^2+1}{x+1}\,dx = \int\left(x^2+\frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{3}x^3 + log|x+1| + c$$

$$\int \frac{x^3}{x-2}\,dx = \int\left(x^2+2x+4+\frac{8}{x-2}\right)dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 4x + 8\cdot log|x-2| + c$$

3.2 $n < m$: innanzi tutto è bene osservare il numeratore: nel caso in cui quest'ultimo sia la derivata del denominatore, si ricade nel caso 2.6. Nel caso più generale, è noto dall'algebra che un qualsiasi polinomio è scomponibile nel prodotto di polinomi di, al più, grado due. Quindi il denominatore $Q(x)$ di $\frac{R(x)}{Q(x)}$ è esprimibile come prodotto di fattori $a_i(x)$ aventi grado non superiore a due del tipo $a_1(x)\cdot a_2(x)\cdot a_3(x)\cdot\ldots a_n(x)$, mentre tutta la frazione $\frac{R(x)}{Q(x)}$ è equivalente alla somma di singole frazioni del tipo $\frac{A}{(x+B)^\gamma}$ oppure $\frac{Cx+D}{(x^2+Ex+F)^\mu}$ se il polinomio x^2+Ex+F è irriducibile ($\Delta<0$); le costanti A , B, C, D, E, F sono da determinarsi in base all'uguaglianza dei coefficienti dei polinomi. In generale si avrà:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x+B_1} + \frac{A_{12}}{(x+B_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1\gamma_1}}{(x+B_1)^{\gamma_1}} + \frac{A_{21}}{x+B_2} + \frac{A_{22}}{(x+B_2)^2} + \ldots + \frac{A_{2\gamma_2}}{(x+B_2)^{\gamma_2}}$$

$$+ \quad \ldots \quad + \frac{A_{k1}}{x+B_k} + \frac{A_{k2}}{(x+B_k)^2} + \ldots + \frac{A_{k\gamma_k}}{(x+B_k)^{\gamma_k}} +$$

$$\frac{C_{11}x+D_{11}}{x^2+E_1x+F_1}+\frac{C_{12}x+D_{12}}{(x^2+E_1x+F_1)^2}+\ldots+\frac{C_{1\mu_1}x+D_{1\mu_1}}{(x^2+E_1x+F_1)^{\mu_1}} \qquad +$$

$$\frac{C_{21}x+D_{21}}{x^2+E_2x+F_2}+\frac{C_{22}x+D_{22}}{(x^2+E_2x+F_2)^2}+\ldots+\frac{C_{2\mu_2}x+D_{2\mu_2}}{(x^2+E_2x+F_2)^{\mu_2}} \qquad + \quad \ldots \quad +$$

$$\frac{C_{h1}x+D_{h1}}{x^2+E_hx+F_h}+\frac{C_{h2}x+D_{h2}}{(x^2+E_hx+F_h)^2}+\ldots+\frac{C_{h\mu_2}x+D_{h\mu_h}}{(x^2+E_hx+F_h)^{\mu_h}}$$

ESEMPI di scomposizioni:

Esempio 3.1

$$\frac{x+5}{x^3-1}=\frac{x+5}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{Bx+C}{(x^2+x+1)}$$

Per determinare le costanti A, B e C si opera nel seguente modo:

$$\frac{A}{(x-1)}+\frac{Bx+C}{(x^2+x+1)}=\frac{A\cdot(x^2+x+1)+(Bx+C)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}=\frac{x^2(A+B)+x(A+C-B)+(A-C)}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}$$

Imponendo che il numeratore sia lo stesso di quello di partenza, ossia che i coefficienti dei termini del medesimo grado coincidano, si ottiene:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A+C-B=1 \\ A-C=5 \end{cases}$$

che risolto dà:

$$\begin{cases} A=2 \\ B=-2 \\ C=-3 \end{cases}$$

Si può dunque scrivere:

$$\frac{x+5}{x^3-1}=\frac{x+5}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}=\frac{2}{(x-1)}+\frac{-2x-3}{(x^2+x+1)}$$

Esempio 3.2

$$\frac{2x^2+5x+5}{x^3+4x^2+x-6}=\frac{2x^2+5x+5}{(x-1)(x+2)(x+3)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+2)}+\frac{C}{(x+3)}=$$

$$\frac{A(x+2)\cdot(x+3)+B(x-1)\cdot(x+3)+C(x-1)\cdot(x+2)}{(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)}=$$
$$\frac{x^2(A+B+C)+x(5A+2B+C)+(6A-3B-2C)}{(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)}$$

Dall'uguaglianza dei coefficienti dei polinomi:

$$\begin{cases} A+B+C=2 \\ 5A+2B+C=5 \\ 6A-3B-2C=5 \end{cases}$$

risolvendo il sistema lineare nelle incognite A,B,C, si ottiene:

$$\begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=2 \end{cases}$$

da cui:

$$\frac{2x^2+5x+5}{x^3+4x^2+x-6}=\frac{1}{(x-1)}+\frac{-1}{(x+2)}+\frac{2}{(x+3)}$$

Esempio 3.3

$$\frac{1}{x^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

imponendo come al solito l'uguaglianza dei coefficienti dello stesso grado a destra e a sinistra, si ha:

$$\begin{cases} A=-1 \\ B=1 \\ C=1 \\ D=0 \end{cases}$$

da cui:

$$\frac{1}{x^2\cdot(x^2+x+1)}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2+x+1}$$

Esempio 3.4

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

risolvendo al solito modo, si ottiene:

$$\begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = -\frac{1}{4} \\ C = \frac{1}{4} \\ D = -\frac{1}{2} \\ E = \frac{1}{2} \end{cases}$$

da cui:

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{4(x+1)} + \frac{-x+1}{4(x^2+1)} + \frac{-x+1}{2(x^2+1)^2}$$

ESEMPI - *funzioni razionali fratte*:

$$\int \frac{2x^2+5x+5}{x^3+4x^2+x-6}dx \qquad \text{(cfr. esempio 3.2)}$$

$$\int \frac{2x^2+5x+5}{x^3+4x^2+x-6}dx = \int \frac{2x^2+5x+5}{(x-1)(x+2)(x+3)}dx = \int \frac{2x^2+5x+5}{(x-1)(x+2)(x+3)}dx =$$

$$\int \frac{1}{(x-1)} + \frac{-1}{(x+2)} + \frac{2}{(x+3)}dx = \log|x-1| - \log|x+2| + 2\log|x+3| + \mathrm{c} =$$

$$\log\left[\frac{|x-1|(x+3)^2}{|x+2|}\right] + \mathrm{c}$$

$$\int \frac{x+5}{x^3-1}\,dx \qquad \text{(cfr. esempio 3.1)}$$

$$\int \frac{x+5}{x^3-1}\,dx = \int\left(\frac{2}{(x-1)} + \frac{-2x-3}{(x^2+x+1)}\right)dx$$

L'integrale di partenza si è quindi scomposto nella somma di più integrali facilmente risolubili: mentre il primo è immediato, per il secondo, essendo il denominatore di secondo grado, è utile ricondursi ad una forma del tipo:

$$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx = \text{arctg}[f(x)] + c$$

Si ha quindi:

$$\int \frac{2}{(x-1)}dx + \int \frac{-2x-3}{(x^2+x+1)}dx \quad =$$

$$2\log|x-1| + \int \frac{-2x-3}{(x^2+x+1)}dx \quad = 2\log|x-1| \ - \int \frac{2x+1+2}{(x^2+x+1)}dx =$$

$$2\log|x-1| \ - \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)}dx \ - \ 2\int \frac{1}{(x^2+x+1)}dx =$$

$$2\log|x-1| \ - \log|x^2+x+1| \ - \ 2\int \frac{1}{(x^2+x+1)}dx =$$

$$\log\frac{(x-1)^2}{|x^2+x+1|} \quad -2\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \log\frac{(x-1)^2}{|x^2+x+1|} - 2\int \frac{1}{\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]}dx =$$

$$\log\frac{(x-1)^2}{|x^2+x+1|} - \frac{8}{3}\int \frac{1}{\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]}dx = \log\frac{(x-1)^2}{|x^2+x+1|} - \frac{4}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]}dx =$$

$$\log\frac{(x-1)^2}{|x^2+x+1|} - \frac{4}{\sqrt{3}}\text{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

Tutti questi passaggi sono riassunti nella seguente formuletta (x^2+px+q non scomponibile):

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx \ = \frac{a}{2}log\left(x^2+px+q\right) + \frac{b-\frac{ap}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{x^2\cdot(x^2+x+1)}dx$$ (cfr. esempio 3.3)

$$\int \frac{1}{x^2\cdot(x^2+x+1)}dx = \int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2+x+1}\right)dx = -\int\frac{1}{x}dx + \int x^{-2}dx + \int\frac{x}{x^2+x+1}dx =$$

$$-\log|x|-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\log\left(x^2+x+1\right)+\frac{0-\frac{1\cdot 1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1^2}{4}}}arctg\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1^2}{4}}}\right)+c$$

$$-\frac{1}{x}+\log\left(\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{|x|}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+c$$

$$\int\frac{1}{(x+1)\left(x^2+1\right)^2}dx$$ (cfr. esempio 3.4)

$$\int\frac{1}{(x+1)\left(x^2+1\right)^2}dx=\int\left(\frac{1}{4(x+1)}+\frac{-x+1}{4\left(x^2+1\right)}+\frac{-x+1}{2\left(x^2+1\right)^2}\right)dx=$$

$$\int\frac{1}{4(x+1)}dx+\int\frac{-x+1}{4\left(x^2+1\right)}dx+\int\frac{-x+1}{2\left(x^2+1\right)^2}dx=$$

$$\frac{1}{4}\log|x+1|+\frac{1}{4}\left[\int\frac{-x}{\left(x^2+1\right)}dx+\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)}dx\right]+\frac{1}{2}\left[\int\frac{-x}{\left(x^2+1\right)^2}dx+\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx\right]=$$

$$\frac{1}{4}\log|x+1|-\frac{1}{8}\log\left(x^2+1\right)+\frac{1}{4}arctg(x)+\frac{1}{4\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx=$$

Resta da integrare $\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx$, ovvero, più in generale $\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^n}dx$: detto

$I_n(x)=\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^n}dx$ si ha:

$$I_{n+1}(x)=\frac{x}{2n\left(x^2+1\right)^n}+\frac{2n-1}{2n}I_n(x)$$

ossia:

$$I_1(x)=\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^1}dx=arctg(x)+c$$

$$I_2(x)=I_{1+1}(x)=\frac{x}{2\cdot 1\cdot\left(x^2+1\right)^1}+\frac{2\cdot 1-1}{2\cdot 1}I_1(x)=\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{2}arctg(x)+d$$

$$I_3(x)=\frac{x}{2\cdot 2\cdot\left(x^2+1\right)^2}+\frac{2\cdot 2-1}{2\cdot 2}I_2(x)=\frac{x}{4\left(x^2+1\right)^2}+\frac{3}{4}\left[\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{2}arctg(x)\right]+e$$

per esercizio, trovare i successivi I_n .

Banalmente, ritornando all'integrale $\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx$ si ha:

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\frac{1}{2}I_2=\frac{1}{2}\left[\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{2}arctg(x)+d\right]=\frac{x}{4\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{4}arctg(x)+c$$

da cui:

$$\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{4}\log\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{4}arctg(x) + \frac{1}{4(x^2+1)} + \frac{x}{4(x^2+1)} + \frac{1}{4}arctg(x) + c =$$
$$\frac{1}{4}\log\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x+1}{4(x^2+1)} + \frac{1}{2}arctg(x) + c$$

$$\int \frac{1}{(x^2+4x+5)^3}dx \qquad (\Delta < 0)$$

$$\int \frac{1}{(x^2+4x+5)^3}dx = \int \frac{1}{((x+2)^2+1)^3}dx = \qquad (x+2=y; dx=dy) \qquad \int \frac{1}{(y^2+1)^3}dy =$$

$$I_3(y) = \frac{y}{4(y^2+1)^2} + \frac{3}{4}\left[\frac{y}{2(y^2+1)} + \frac{1}{2}arctg(y)\right] + c =$$

$$\frac{x+2}{4((x+2)^2+1)^2} + \frac{3}{4}\left[\frac{x+2}{2((x+2)^2+1)} + \frac{1}{2}arctg(x+2)\right] + c$$

Più in generale vale la seguente formuletta ricorsiva ($x^2 + px + q$ non scomponibile):

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{a}{2(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}} + \frac{b - a\frac{p}{2}}{b^{2n-1}} I_n\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{b}\right)$$ essendo:

$$I_1\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{b}\right) = arctg\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{b}\right) + c$$

$$I_{n+1}\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{b}\right) = \frac{\frac{x+\frac{p}{2}}{b}}{2n\left(\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{b}\right)^2+1\right)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{b}\right)$$

4. Integrali per *parti*

$$\int f'(x)g(x)dx$$

L'integrale per parti deriva dal fatto che l'integrale è l'operatore inverso della derivata. Si ha infatti:

$D[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

da cui:

$f'(x)g(x) = D[f(x)g(x)] - f(x)g'(x)$

e quindi, integrando membro a membro:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

In generale è conveniente scegliere come fattore differenziale $f'(x)$ e fattore finito $g(x)$ le seguenti funzioni:

$f'(x)$	$g(x)$
$sin(x)$ se è moltiplicato per x^n	x^n se è moltiplicato per $sin(x)$
$cos(x)$ se è moltiplicato per x^n	x^n se è moltiplicato per $cos(x)$
e^x se è moltiplicato per x^n	x^n se è moltiplicato per e^x
x^n se è moltiplicato per $log(x)$	$log(x)$ se è moltiplicato per x^n
x^n se è moltiplicato per $arcsin(x)$	$arcsin(x)$ se è moltiplicato per x^n
x^n se è moltiplicato per $arccos(x)$	$arccos(x)$ se è moltiplicato per x^n
x^n se è moltiplicato per $arctg(x)$	$arctg(x)$ se è moltiplicato per x^n
x^n se è moltiplicato per $arcctg(x)$	$arcctg(x)$ se è moltiplicato per x^n

<u>N.B.</u> Ricorda che $x^0 = 1$ per cui le suddette regole valgono anche nel caso particolare $x^n = 1$

ESEMPI:

$\int x\cos(x)dx \quad \begin{cases} f'(x) = \cos(x) \\ g(x) = x \end{cases} \quad \begin{matrix} f(x) = sin(x) \\ g'(x) = 1 \end{matrix}$

$$\int x\cos(x)dx = x \cdot sin(x) - \int sin(x)dx = x \cdot sin(x) + \cos(x) + \mathrm{c}$$

$\int \log(x)dx \qquad \begin{cases} f'(x)=1 & f(x)=x \\ g(x)=\log(x) & g'(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases}$

$$\int \log(x)dx = x\cdot\log(x)-\int dx = x\cdot\log(x)-x+\mathrm{c}$$

$\int \mathrm{arctg}(x)dx \qquad \begin{cases} f'(x)=1 & f(x)=x \\ g(x)=\mathrm{arctg}(x) & g'(x)=\dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$

$$\int \mathrm{arctg}(x)dx = x\cdot\mathrm{arctg}(x)-\int\frac{x}{1+x^2}dx = x\cdot\mathrm{arctg}(x)-\frac{1}{2}\log\left(x^2+1\right)+\mathrm{c}$$

$\int x^2e^x dx \qquad \begin{cases} f'(x)=e^x & f(x)=e^x \\ g(x)=x^2 & g'(x)=2x \end{cases}$

$$\int x^2e^xdx = x^2e^x-\int 2x\cdot e^xdx = x^2e^x-2\left(x\cdot e^x-\int e^x\right)+\mathrm{c} =$$
$$x^2e^x-2x\cdot e^x+2e^x+\mathrm{c} = e^x\left(x^2-2x+2\right)+\mathrm{c}$$

$\int \sqrt{1-x^2}dx \qquad \begin{cases} f'(x)=1 & f(x)=x \\ g(x)=\sqrt{1-x^2} & g'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$

$$\int\sqrt{1-x^2}dx = x\sqrt{1-x^2}-\int x\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$
$$x\sqrt{1-x^2}-\int\frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sqrt{1-x^2}-\int\sqrt{1-x^2}dx+\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

si ha dunque:

$$\int\sqrt{1-x^2}dx = x\sqrt{1-x^2}-\int\sqrt{1-x^2}dx+\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

da cui:

$$\int\sqrt{1-x^2}dx = \frac{x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx}{2} = \frac{x\sqrt{1-x^2}+arcsin(x)}{2}+\mathrm{c}$$

5. Integrali per *sostituzione*

In taluni casi risulta necessario sostituire alla variabile d'integrazione x una nuova variabile t legata alla precedente da una opportuna relazione del tipo $x=\varphi(t)$ che di solito viene suggerita. Per una corretta applicazione del metodo, si deve ricordare che: al posto della x si sostituisce l'espressione $\varphi(t)$, mentre al posto del dx bisogna sostituire il differenziale di $\varphi(t)$ ossia $D[\varphi(t)]\cdot dt$.

N.B. **Nel caso di integrali *definiti* è necessario un cambiamento degli estremi di integrazione secondo la relazione $x=\varphi(t)$, ossia: $\int_c^d f(x)dx=\int_\gamma^\delta f(\varphi(t))\varphi'(t)dx$ con $c=\varphi(\gamma)$ e $d=\varphi(\delta)$**

Esistono alcune ***tipologie di sostituzione*** che funzionano quasi sempre per funzioni razionali $R(x)$:

TIPOLOGIA di integrale	**SOSTITUZIONE consigliata**
$\int R(e^x)$	$e^x=t$
$\int R(sin(x), cos(x))$	$tg\left(\frac{x}{2}\right)=t \Rightarrow sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}; cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$
$\int R([sin(x)]^2,[cos(x)]^2, sin(x)\cdot cos(x), tg(x), cotg(x)$	$tg(x)=t \Rightarrow [sin(x)]^2=\frac{t^2}{1+t^2}; [cos(x)]^2=\frac{1}{1+t^2}$

ESEMPI:

$\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$ Ponendo $e^x=t$ si ricava $e^x dx=dt$ da cui: $dx=\frac{dt}{e^x}$

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}dx=\int \frac{t}{1+t}\frac{dt}{t}=\int \frac{1}{1+t}dt=\log|1+t|+\text{c}$$

essendo $t=e^x$ si ottiene:

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}dx=\log|1+e^x|+\text{c}$$

$\int \frac{1}{sin(x)}dx$ Ponendo: $sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}$ ed essendo $tg\left(\frac{x}{2}\right)=t$, derivando si ricava

$$\frac{1}{2}\left[1+\left[tg\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2\right]dx = 1dt \quad \text{da cui} \quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$\int \frac{1}{sin(x)}dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt = log|t|+c \text{ ma essendo } t=tg\left(\frac{x}{2}\right) \text{ si ottiene:}$$

$$\int \frac{1}{sin(x)}dx = log\left|tg\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c$$

$\int \frac{1}{a[sin(x)]^2+b[cos(x)]^2}dx$ Ponendo: $[sin(x)]^2=\frac{t^2}{1+t^2}$ e $[cos(x)]^2=\frac{1}{1+t^2}$ ed essendo $tg(x)=t$

derivando si ricava: $\left[1+[tg(x)]^2\right]dx=1dt$ da cui $dx=\frac{dt}{1+t^2}$

$$\int \frac{1}{a[sin(x)]^2+b[cos(x)]^2}dx = \int \frac{1}{a\frac{t^2}{1+t^2}+b\frac{1}{1+t^2}}\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{at^2+b}dt =$$

$$\int \frac{1}{b\left(\left(\sqrt{\frac{a}{b}}t\right)^2+1\right)}dt = \frac{1}{\sqrt{ab}}arctg\left(\sqrt{\frac{a}{b}}t\right)+c \text{ essendo } t=tg(x) \text{ si ottiene:}$$

$$\int \frac{1}{a[sin(x)]^2+b[cos(x)]^2}dx = \frac{1}{\sqrt{ab}}arctg\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot tg(x)\right)+c$$

Si provi a calcolare $\int_0^{2\pi} \frac{1}{[a\cdot sin(x)]^2+[b\cdot cos(x)]^2}dx$ (perché non può essere uguale a zero?)

$\int \sqrt{1-x^2}dx$ Ponendo $x=sin(t)$ si ricava: $dx=\cos(t)dt$

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-[sin(t)]^2}\cos(t)dt = \int [\cos(t)]^2dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = \frac{1}{2}t+\frac{1}{4}sin(2t)+c$$

essendo $x=sin(t)$ si ricava: $t=arcsin(x)$ da cui

$$\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}sin(2t)+c=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}sin(t)cos(t)=\frac{1}{2}arcsin(x)+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+c=$$

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{x\sqrt{1-x^2}+arcsin(x)}{2}+c$$

$\int \frac{1}{x\log(x)}dx$ Ponendo $\log(x)=t$ si ricava $\frac{1}{x}dx = dt$ da cui $dx = x \cdot dt$

essendo $\log(x)=t$ si ha: $x = e^t$ da cui: $dx = e^t \cdot dt$

$$\int \frac{1}{x\log(x)}dx = \int \frac{1}{e^t \cdot t}e^t dt = \int \frac{1}{t}dt = \log|t| + \mathrm{c};$$ ricordando che $t = \log(x)$ si ricava:

$$\int \frac{1}{x\log(x)}dx = \log|\log(x)| + \mathrm{c}$$

$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$ Ponendo $t = \sqrt{1+x^2}$ si ha: $x^2 = 1 - t^2$ da cui $xdx = tdt$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}xdx = \int \frac{t^2-1}{t}tdt = \int (t^2-1)dt = \frac{t^3}{3} - t + c$$

essendo $t = \sqrt{1+x^2}$ si ha:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}{3} - \sqrt{1+x^2} + c$$

6. Conclusione:

Come si è detto all'inizio, integrare non è facile (e queste 14 pagine lo dimostrano) perché non si riduce ad un'applicazione pedissequa di una regola ma richiede una certa esperienza nonché lungimiranza (soprattutto se si opera per parti o per sostituzione): queste abilità, se non si possiedono, vanno coltivate con costante esercizio! Tuttavia, come in ogni situazione della vita, prima di imboccare una certa strada è sempre meglio ***guardare bene in faccia l'integrale***: spesso una semplice razionalizzazione, una sostituzione ben azzeccata, una scomposizione o una integrazione per parti oculata portano rapidamente ed elegantemente al risultato. Ad esempio i seguenti integrali dovrebbero essere calcolati "a vista" in non più di quindici secondi!

$$\int \frac{e^x + cos(x)}{e^x + sin(x)} = log|e^x + sin(x)| + c$$

$$\int \frac{2}{\sqrt{x} - \sqrt{x+2}}dx = \int \frac{2}{\sqrt{x} - \sqrt{x+2}} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+2}}dx = -\int \left(\sqrt{x} + \sqrt{x+2}\right)dx = -\frac{2}{3}\left[\left(\sqrt{x}\right)^3 + \left(\sqrt{x+2}\right)^3\right] + c$$

$$\int \frac{log(log(x))}{x}dx = \int \frac{1}{x} log(log(x))dx = log(x) \cdot log(log(x)) - \int log(x) \frac{1}{log(x)} \frac{1}{x}dx =$$
$$log(x) \cdot [log(log(x)) - 1] + c$$