6.1 Valori tipici delle grandezze in uno strato limite

6.2 Teoria dello strato limite di Prandtl

Le equazioni dello strato limite di Prandtl possono essere derivate dalle equazioni di Navier–Stokes sia mediante un argomento euristico basato sul consideriazioni fisiche sia mediante una procedura di limite per $\mathrm{Re} \to \infty$. In questo paragrafo seguiamo la prima via, dovuta originariamente a Prandtl, in cui si analizzano gli ordini di grandezza dei vari termini delle equazioni di Navier–Stokes.

Ipotesi della teoria dello strato limite

Le ipotesi alla base della teoria dello strato limite di Prandtl sono le seguenti:

- corrente incomprimibile e fluido di densità uniforme;
- corrente stazionaria e bidimensionale;
- lastra piana semi-infinita o corpo sottile allineati con la corrente esterna;
- effetti viscosi importanti solo in uno strato sottile vicino al corpo.

Impostiamo inizialmente il problema scrivendo le equazioni che governano la corrente con caratteristiche che derivano dalle prime tre ipotesi. Ciò significa ridurre le equazioni di Navier–Stokes incomprimibili al caso di corrente stazionaria in due dimensioni e specificare le condizioni al contorno appropriate alla geometria di una lastra sottile. Successivamente si analizzano invece le conseguenze della quarta ipotesi che è la parte più complessa da formulare per ricavare le equazioni di Prandtl.

Consideriamo una lastra semi-infinita, investita da una corrente la cui velocità a grande distanza è parallela al piano della lastra e perpendicolare al suo bordo di attacco. Si suppone che la corrente sia piana, per cui si introduce un sistema di coordinate cartesiane (x, y). La metà positiva dell'asse x coincide con la sezione trasversale della lastra e l'origine delle coordinate corrisponde allo spigolo di attacco della lastra. La corrente esterna ha la stessa direzione e lo stesso verso dell'asse x.

Le equazioni che governano la corrente incomprimibile di un fluido avente densità uniforme, $\rho = \overline{\rho}$, e viscosità costante, $\mu = \overline{\mu}$, nel caso di moto stazionario si ottengono eliminando il termine di derivata temporale dalle equazioni di Navier–Stokes introdotte nel paragrafo 5.4

$$(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} - \nu\, \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\boldsymbol{\nabla} P}{\overline{\rho}} = 0,$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0,$$

dove $\nu = \overline{\mu}/\overline{\rho}$. Se consideriamo ora il problema di una corrente bidimensionale piana e scriviamo tutti i termini esprimendoli mediante le coordinate cartesiane x-y, le equazioni di Navier–Stokes precedenti assumono la forma

$$
\begin{aligned}
&u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial P}{\partial x} = 0,\\
&u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} - \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial P}{\partial y} = 0,\\
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.
\end{aligned}
$$

Il campo di moto deve essere determinato in tutto il piano x-y tranne lungo la semiretta $x > 0$ e $y = 0$, che rappresenta una sezione della lastra. Notiamo che, a causa della natura incomprimibile della corrente, la presenza del corpo influisce sul campo di moto anche nella regione a monte, $x < 0$. Tuttavia, queste perturbazioni si attenuano allontandosi dal corpo e quindi a grande distanza la corrente si può ritenere nota e sarà caratterizzata tramite l'assegnazione delle condizioni al contorno.

Le condizioni al contorno necessarie per il problema della lastra piana semi-infinita disposta come il semipiano ($y = 0$, $x > 0$) comprendono la velocità nulla su tutta la superficie della lastra:

$$
u(x,0) = 0 \qquad \text{e} \qquad v(x,0) = 0 \qquad \text{per } x > 0,
$$

la specificazione della corrente *esterna* a grande distanza sopra la lastra, ovvero

$$
u(x,\infty) = u^{\text{est}}(x) \qquad \text{e} \qquad v(x,\infty) = v^{\text{est}}(x) \qquad \text{per } x > 0,
$$

dove $(u^{\text{est}}(x), v^{\text{est}}(x))$ è una distribuzione nota della velocità, e infine la specificazione della corrente *a monte* della lastra

$$
u(-\infty,y) = u^{\text{monte}}(y) \qquad \text{e} \qquad v(-\infty,y) = v^{\text{monte}}(y) \qquad \forall y,
$$

dove $(u^{\text{monte}}(y), v^{\text{monte}}(y))$ è la distribuzione nota della velocità a grande distanza a monte della lastra. L'andamento della velocità della corrente a valle della lastra, ovvero per $x \to \infty$, non è invece specificato.

Supponiamo ora di restringere l'attenzione a condizioni al contorno per le quali il campo di moto sia *simmetrico* rispetto al piano orizzontale $y = 0$. Un esempio è il caso di corrente esterna uniforme parallela alla lastra. Se si considerano soluzioni simmetriche, è sufficiente risolvere il problema nel semipiano superiore, $y > 0$. Allora, l'insieme delle condizioni al contorno da imporre su ciascuna delle componenti della velocià comprende

$$
\begin{aligned}
&u(x, 0) = 0 \qquad \text{e} \qquad u(x, \infty) = u^{\text{est}}(x), \qquad x > 0,\\
&u(-\infty, y) = u^{\text{monte}}(y), \qquad y > 0,\\
&v(x, 0) = 0 \qquad \text{e} \qquad v(x, \infty) = v^{\text{est}}(x), \qquad x > 0,\\
&v(-\infty, y) = v^{\text{monte}}(y), \qquad y > 0.
\end{aligned}
$$

A queste si devono aggiungere le **condizioni al contorno di simmetria** sulla semiretta $x < 0$ e $y = 0$, che assumono la forma seguente

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = 0, \qquad x < 0,\\
&v(x, 0) = 0, \qquad x < 0.
\end{aligned}
$$

In altre parole, la componente v della velocità normale all'asse di simmetria deve annullarsi su di esso, mentre la componente u tangente all'asse deve avere soltanto derivata normale nulla sull'asse stesso e quindi potrà assumere valori diversi da zero.

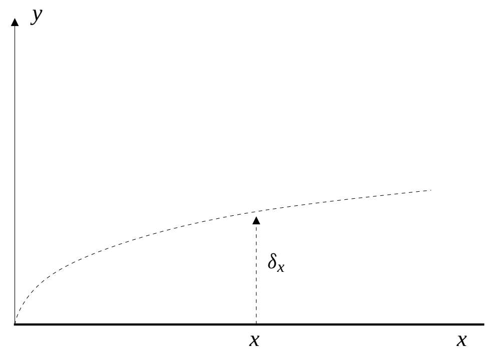

Figura 6.1 Struttura dello strato limite su una lastra piana semi-infinita

Analisi degli ordini di grandezza

La figura 6.1 mostra una tipica configurazione di strato limite su una lastra piana semi-infinita investita da una corrente uniforme parallela al piano della lastra. In questo problema non esiste alcuna scala spaziale di riferimento definita, per cui si potrà considerare solo la distanza x dal bordo di attacco della lastra come lunghezza utile per procedere alla formulazione adimensionale del problema.

Indichiamo poi con δ_x la distanza verticale $y = \delta_x$ dalla lastra del punto in cui il valore della velocità raggiunge approssimativamente il valore della corrente esterna. La grandezza δ_x rappresenta quindi una stima della **spessore dello strato limite** in corrispondenza del punto x sulla lastra. Si suppone che agli alti numeri di Reynolds la struttura del campo di moto sia tale che l'andamento di δ_x è come mostrato nella figura 6.1. Questo significa che, tranne nella zona vicina al bordo di attacco dove $\delta_x \sim x$, lo spessore dello strato limite è supposto essere piccolo rispetto alla distanza x, ovvero $\delta_x \ll x$.

La componente u della velocità del campo di moto sarà di ordine $\mathcal{U}$, dove $\mathcal{U}$ rappresenta un valore caratteristico tipico della componente x della velocità della corrente esterna, ad esempio, nel caso di velocità esterna uniforme U sarà $\mathcal{U} = U$. Indichiamo poi con $\mathcal{V}$ un valore tipico della componente verticale della velocità, che stimeremo fra un momento. Su questa base è possibile fornire una stima del valore delle derivate spaziali delle variabili incognite, che saranno:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\mathcal{U}}{x} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{\mathcal{V}}{\delta_x}.$$

Notiamo che nelle relazioni di questo tipo contenenti stime di vari termini il segno delle quantità non ha alcuna importanza e le relazioni devono sempre essere intese fra i valori assoluti delle grandezze considerate.

La condizione di incomprimibilità della corrente in due dimensioni permette di ricavare subito che

$$\frac{\mathcal{U}}{x} \sim \frac{\mathcal{V}}{\delta_x} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{V} \sim \mathcal{U}\,\frac{\delta_x}{x}.$$

Pertanto la condizione sulla piccolezza dello spessore dello strato limite $\delta_x \ll x$ implica anche

$$\mathcal{V} \ll \mathcal{U}$$

il che significa che il moto del fluido nello strato limite è quasi parallelo alla lastra.

Procedendo nella nostra analisi degli ordini di grandezza, consideriamo l'equazione della componente orizzontale della velocità

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

La stima di tutte le derivate di u che compaiono nell'equazione permette di scrivere

$$\mathcal{U}\,\frac{\mathcal{U}}{x} + \mathcal{V}\,\frac{\mathcal{U}}{\delta_x} + \nu\left(\frac{\mathcal{U}}{x^2} + \frac{\mathcal{U}}{\delta_x^2}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \sim 0.$$

Si ricorda che i segni non sono significativi nelle relazioni riguardanti le stime dei termini. Se usiamo ora la stima di $\mathcal{V}$ appena ottenuta, si vede che i due termini non lineari hanno lo stesso ordine di grandezza, poiché

$$\mathcal{U}\,\frac{\mathcal{U}}{x} + \mathcal{V}\,\frac{\mathcal{U}}{\delta_x} \sim \frac{\mathcal{U}^2}{x} + \mathcal{U}\,\frac{\delta_x}{x}\,\frac{\mathcal{U}}{\delta_x} \sim \frac{\mathcal{U}^2}{x} + \frac{\mathcal{U}^2}{x}.$$

Inoltre è evidente che, dei due termini viscosi, quello relativo alla derivata lungo la lastra è molto minore di quello relativo alla derivata normale. Di conseguenza la stima dei termini dell'equazione permette di scrivere

$$\frac{\mathcal{U}^2}{x} + \nu\,\frac{\mathcal{U}}{\delta_x^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \sim 0.$$

avendo trascurato i coefficienti numerici, di nessuna importanza nelle stime dei termini. Come discusso nel paragrafo precedente, lo strato limite è per definizione la zona nella quale gli effetti del termine viscoso sono dello stesso ordine di quelli dei termini non lineare. Imponiamo quindi questa condizione scrivendo la seguente relazione

$$\frac{\mathcal{U}^2}{x} \sim \nu\,\frac{\mathcal{U}}{\delta_x^2} \qquad \text{da cui} \qquad \delta_x^2 \sim \frac{\nu x}{\mathcal{U}}.$$

In altre parole, dalle ipotesi di Prandtl segue che lo spessore δ_x dello strato limite dipende dalla distanza x dal bordo di attacco secondo la relazione

$$\delta_x \sim \sqrt{\frac{\nu x}{\mathcal{U}}} \qquad \text{o in forma adimensionale} \qquad \frac{\delta_x}{x} \sim \sqrt{\frac{\nu}{\mathcal{U}x}}.$$

Se ora introduciamo un numero di Reynolds **locale** basato sulla distanza x dal bordo di attacco della lastra

$$\mathrm{Re}_x = \frac{\mathcal{U}x}{\nu},$$

lo spessore adimensionale dello strato limite avrà la seguente dipendenza da Re_x

$$\frac{\delta_x}{x} \sim \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}.$$

Nell'ambito dell'approssimazione $\delta_x \ll x$, il termine viscoso associato alla derivata lungo la parete potrà essere trascurato e l'equazione della componente x della velocità si ridurrà a

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = 0.$$

Consideriamo ora l'equazione relativa alla componente della velocità normale alla parete

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} - \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

e applichiamo a essa la stessa analisi degli ordini di grandezza. Abbiamo

$$\mathcal{U}\,\frac{\mathcal{V}}{x} + \mathcal{V}\,\frac{\mathcal{V}}{\delta_x} + \nu\left(\frac{\mathcal{V}}{x^2} + \frac{\mathcal{V}}{\delta_x^2}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} \sim 0.$$

Anche in questo caso i due termini non lineari hanno lo stesso ordine di grandezza in quanto, per la stima derivante dalla condizione di incomprimibilità, risulta

$$\mathcal{U}\,\frac{\mathcal{V}}{x} + \mathcal{V}\,\frac{\mathcal{V}}{\delta_x} \sim \frac{\mathcal{V}x}{\delta_x}\frac{\mathcal{V}}{x} + \frac{\mathcal{V}^2}{\delta_x} \sim \frac{\mathcal{V}^2}{\delta_x} + \frac{\mathcal{V}^2}{\delta_x},$$

e la derivata seconda rispetto a x è trascurabile se confrontata con quella rispetto a y, per cui vale la stima

$$\frac{\mathcal{V}^2}{\delta_x} + \nu\,\frac{\mathcal{V}}{\delta_x^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} \sim 0.$$

Utilizzando la stima di $\mathcal{V}$, questa relazione è equivalente a

$$\frac{\mathcal{U}^2\delta_x}{x^2} + \nu\,\frac{\mathcal{U}}{x\delta_x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} \sim 0,$$

per cui, esprimendo ν in termini del numero di Reynolds locale, $\nu = \mathcal{U}x/\mathrm{Re}_x$, si ha anche

$$\frac{\mathcal{U}^2\,\delta_x}{x^2} + \frac{1}{\mathrm{Re}_x}\frac{\mathcal{U}^2}{\delta_x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} \sim 0.$$

Questa relazione mostra che per $\delta_x \ll x$ e $\mathrm{Re}_x \gg 1$ i primi due termini hanno lo stesso ordine di grandezza. Ne consegue necessariamente che il terzo termine avrà o lo stesso ordine di grandezza degli altri o sarà più piccolo. Quest'ultimo termine, se confrontato con il corrispondente dell'equazioni della componente x, risulta piccolo, quindi, seguendo Prandtl, assumiamo

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Pertanto la pressione nello strato limite varierà solo con la coordinata x lungo la parete e non dipenderà dalla distanza dalla parete stessa, ovvero avremo $P = P(x)$. La forma corretta dell'equazione per la componente x della velocità appena ricavata sarà allora

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} = 0,$$

dove la derivata parziale di P è stata sostituita dalla derivata ordinaria in quanto la pressione dentro lo strato limite è funzione della sola variabile x.

Il sistema di equazioni da soddisfare per determinare il campo di moto della corrente attorno alla lastra sarà quindi

$$\begin{aligned}
&u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} = 0,\\
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.
\end{aligned}$$

Abbiamo pertanto un sistema di due equazioni nelle *tre* incognite $u(x, y)$, $v(x, y)$ e $P(x)$, che richiede quindi di essere completato opportunamente per potere avere una soluzione unica.

Corrente non viscosa

È a questo punto che interviene l'elemento più delicato della teoria di Prandtl. Lontano dalla lastra gli effetti della viscosità del fluido sono trascurabili e la corrente è descritta con buona approssimazione dalle equazioni di Eulero per correnti incomprimibili piane stazionarie. Di conseguenza sarà possibile determinare il campo di pressione della corrente inviscida a una certa distanza dalla lastra risolvendo in questa zona le equazioni di Eulero con le relative condizioni al contorno. Abbiamo visto nei capitoli 3 e 4 che con queste equazioni è permesso imporre solo la condizione al contorno per la componente normale della velocità. Se indichiamo con $\mathbf{u}^e(x, y)$ e $P^e(x, y)$ le variabili incognite delle nostre equazioni di Eulero da risolvere nel semipiano $y > 0$, avremo le seguenti condizioni al contorno:

$$u^e(-\infty, y) = u^{\text{monte}}(y), \qquad y > 0,$$

$$v^e(x, 0) = 0 \qquad \text{e} \qquad v^e(x, \infty) = v^{\text{est}}(x), \qquad x > 0,$$

dove $u^{\text{monte}}(y)$ è la distribuzione della componente orizzontale della velocità a monte, a grande distanza dalla lastra, mentre $v^{\text{est}}(x)$ è la distribuzione della componente verticale della velocità esterna imposta a grande distanza dalla lastra.

Supponendo ora di avere determinato il campo di pressione $P^e(x, y)$ della corrente inviscida, possiamo valutare il suo andamento sulla superficie della lastra e assumerlo come pressione nota internamente allo strato limite. In altre parole, la pressione della corrente inviscida valutata sulla lastra costituisce la pressione lontana dalla parete per le equazioni dello strato limite. In termini matematici porremo quindi

$$P(x) = P^e(x, 0),$$

il che significa che la variabile incognita $P(x)$ vista in precedenza è determinata dalla funzione $P^e(x, 0)$ calcolata risolvendo le equazioni di Eulero incomprimibili.

Con questa assunzione l'equazione della componente orizzontale della velocità assumerà la seguente forma

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P^e(x, 0)}{\partial x},$$

in cui il secondo membro è un termine *noto*.

Equazioni dello strato limite di Prandtl

L'ultimo passo per la costruzione delle equazioni dello strato limite nel caso della corrente attorno alla lastra piana semi-infinita deriva dal supporre che la corrente a monte sia uniforme, ovvero dal scegliere la condizione al contorno particolare

$$u^e(-\infty, y) = U, \qquad y > 0,$$

dove $U > 0$, mentre si permette ancora una distribuzione della velocità esterna verticale $v^{\text{est}}(x)$ di tipo generale. La condizione a monte implica che la corrente è irrotazionale per cui la corrente inviscida soddisferà (la versione irrotazionale de) il teorema di Bernoulli, ossia,

$$\frac{P^e(x,y)}{\overline{\rho}} + \frac{1}{2}|\mathbf{u}^e(x,y)|^2 = C,$$

dove C una costante arbitraria. Valutando questa relazione sulla lastra, ossia per $y = 0$, e risolvendo rispetto alla pressione, abbiamo

$$\frac{P^e(x,0)}{\overline{\rho}} = -\frac{1}{2}[u^e(x,0)]^2 + C.$$

dove abbiamo sfruttato la condizione al contorno $v^e(x,0) = 0$ nell'esprimere il modulo della velocità sulla lastra. A questo punto è conveniente definire la seguente funzione della sola variabile x

$$U^e(x) \equiv u^e(x,0)$$

che rappresenta la velocità (già determinata) della corrente inviscida sulla superficie della lastra. In termini di questa funzione è immediato derivare

$$\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial P^e(x,0)}{\partial x} = -U^e(x)\frac{dU^e(x)}{dx},$$

e quindi l'equazione della componente orizzontale della velocità assume la forma

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U^e(x)\frac{dU^e(x)}{dx}.$$

Combinando questa equazione con la condizione di incomprimibilità si ottiene il seguente sistema

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U^e(x)\frac{dU^e(x)}{dx},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

con due equazioni differenziali alle derivate parziali nelle due incognite $u(x, y)$ e $v(x, y)$. Questo sistema è noto con il nome di **equazioni di Prandtl** della teoria dello strato limite. Si noti che la funzione $U^e(x)$ è conosciuta e quindi il termine del membro di destra della prima equazione è proprio il suo termine noto.

Il dominio in cui risolviamo queste equazioni è costituito dal primo quadrante $(x > 0, y > 0)$.

Per quanto riguarda le condizioni al contorno, sulla lastra si impone l'annullamento della velocità. Inoltre, sulla retta verticale $x = 0$, $y > 0$, si impone che la componente orizzontale della velocità sia uniforme, ovvero, $u(0, y) = U$. Infine, a grande distanza dalla lastra, si impone, sempre sulla componente orizzontale, la distribuzione della velocità $U^e(x)$ fornita dalla soluzione delle equazioni di Eulero valutata sulla superficie della lastra. Naturalmente si suppone che sia soddisfatta la condizione di compatibilità $U^e(0) = U$.

L'insieme delle condizioni al contorno da imporre nella risoluzione delle equazioni di Prandtl è

$$\begin{aligned} &u(x, 0) = 0 \qquad \text{e} \qquad u(x, \infty) = U^e(x), \qquad x > 0, \\ &u(0, y) = U, \qquad y > 0, \\ &v(x, 0) = 0, \qquad x > 0. \end{aligned}$$

Si può notare che, mentre la variabile incognita u ha condizioni al contorno sia sulla lastra $y = 0$ sia per $y \to \infty$, il valore al contorno della variabile incognita v è prescritto solo sulla lastra. Ciò è conforme alla natura delle equazioni di Prandtl nelle quali la sola derivata seconda presente è $\partial^2 u/\partial y^2$ mentre l'unica derivata di v presente è la derivata prima rispetto a y. Inoltre, riguardo la derivata rispetto a x, compare solo quella della variabile u, $\partial u/\partial x$, per cui sulla semiretta verticale passante per $x = 0$ si può imporre la condizione al contorno solo per u.

Osservazione Il problema di Prandtl così formulato presenta una singolarità in corrispondenza del bordo di attacco della lastra, ovvero nell'origine delle coordinate cartesiane. Infatti in questo punto la componente orizzontale della velocità deve essere nulla, in quanto esiste la condizione di non scivolamento sulla lastra, ma deve anche essere uguale a U, in virtù della condizione di velocità sulla semiretta verticale, $u(0, y=0) = U$. Essendo U necessariamente diverso da zero, il dato al contorno della componente u della velocità è allora *discontinuo* nel vertice in basso a sinistra $(0, 0)$ del dominio. Questa discontinuità dei dati al contorno di u implica una *singolarità* della soluzione. Come vedremo, tale singolarità gioca un ruolo importante nel ricavare soluzioni di tipo similare del problema della lastra piana.

Rappresentazione della funzione di corrente

La funzione di corrente ψ è stata introdotta nel paragrafo 3.9.

Una forma conveniente delle equazioni di Prandtl si ottiene utilizzando la funzione di corrente ψ che permette di rappresentare il campo di velocità incomprimibile in due dimensioni mediante le relazioni

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \text{e} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

In questo modo risulta soddisfatto il vincolo di incomprimibilità e la prima equazione di Prandtl assume la forma

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\,\partial y} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \nu\,\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = U^e(x)\frac{dU^e(x)}{dx}.$$

Abbiamo una sola equazione differenziale alle derivate parziali del *terzo ordine* in una sola incognita, ψ. Le condizioni al contorno per la nuova variabile ψ si derivano dal quelle originarie per u e v. Consideriamo per prima la condizione di non penetrazione sulla lastra: $v(x,0) = 0$. In termini di ψ essa diventa $\partial\psi(x,0)/\partial x = 0$, relazione che, una volta integrata lungo l'asse x, può essere scritta più semplicemente come

$$\psi(x,0) = \text{costante} = 0, \qquad x > 0.$$

È lecito prendere uguale a zero il valore della costante in quanto la funzione di corrente è definita a meno di una costante arbitraria. Anche la condizione sulla semiretta verticale $x = 0$ e $y > 0$, cioè $\partial\psi(0,y)/\partial y = U$, può essere integrata e conduce alla semplice condizione

$$\psi(0,y) = \int_0^y U\,d\tilde{y} = Uy, \qquad y > 0.$$

Le altre due condizioni al contorno si riscrivono direttamente come condizioni sulla derivata rispetto alla coordinata y normale alla lastra:

$$\frac{\partial \psi(x,0)}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \psi(x,\infty)}{\partial y} = U^e(x), \qquad x > 0.$$

Il problema completo dello strato limite nella rappresentazione della funzione di corrente consiste quindi: nell'equazione per ψ, che scriviamo con le derivate di ordine più elevato scritte per prime, e nelle condizioni al contorno appena ricavate:

$$
\begin{aligned}
&\nu \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} = -U^e(x)\frac{dU^e(x)}{dx},\\
&\psi(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial\psi(x,0)}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\psi(x,\infty)}{\partial y} = U^e(x), \qquad x > 0,\\
&\psi(0,y) = Uy, \qquad y > 0.
\end{aligned}
$$

In questa formulazione il problema dello strato limite rivela la natura matematica delle semplificazioni conseguenti alle ipotesi poste da Prandtl a fondamento della sua teoria: l'equazione della funzione di corrente, che nel caso generale di corrente piana incomprimibile di tipo Navier–Stokes è del quarto ordine, si riduce a un'equazione del terzo ordine. Corrispondentemente sul "contorno orizzontale lontano" $y \to \infty$ la nuova variabile incognita ψ ha una sola condizione al contorno invece di due. Per quanto riguarda le condizioni al contorno sui lati verticali, c'è una sola condizione in conformità con la sparizione di tutte le derivate rispetto a x di ordine superiore al primo.

6.3 Corrente esterna uniforme: profilo di Blasius

Un caso particolarmente importante di strato limite sulla lastra semi-infinita si presenta quando la corrente esterna è uniforme e parallela alla lastra, con velocità U assegnata. In questo caso $u^e(x,y) = U$, per cui anche $U^e(x) = u^e(x,0) = U$. Le equazioni di Prandtl per le componenti della velocità si riducono allora a

$$
\begin{aligned}
&u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\\
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,
\end{aligned}
$$

e devono essere risolte con le corrispondenti condizioni al contorno

$$
\begin{aligned}
&u(x,0) = 0 \qquad \text{e} \qquad u(x,\infty) = U, \qquad x > 0,\\
&u(0,y) = U, \qquad y > 0,\\
&v(x,0) = 0, \qquad x > 0.
\end{aligned}
$$